UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino

Célia Maria Martins Vitorino Mestre

DOUTORAMENTO EM EDUCAÇÃO
DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

2014

UNIVERSIDADE DE LISBOA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino

Célia Maria Martins Vitorino Mestre

Tese orientada pela Professora Doutora Hélia Margarida Oliveira, especialmente elaborada para a obtenção do grau de doutor em Educação na especialidade de Didática da Matemática

2014

Trabalho realizado no âmbito do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática financiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através do contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008.

Resumo

Este estudo pretende compreender como se desenvolve a capacidade de generalização dos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade, no decurso de uma experiência de ensino implementada durante um ano letivo, numa perspetiva de desenvolvimento do pensamento algébrico. Mais especificamente, procura-se, por um lado, compreender como evoluiu a capacidade de generalização em contextos de promoção dos pensamentos relacional e funcional e a capacidade de representação da generalização dos alunos e, por outro, refletir sobre o contributo da experiência de ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

A experiência de ensino orientou-se por uma conjetura com uma dupla dimensão. Uma dimensão de conteúdo assente numa definição de pensamento algébrico que considera a generalização e a sua representação como aspetos centrais, e situações que promovam o desenvolvimento dos pensamentos relacional e funcional como contextos. Uma dimensão pedagógica enquadrada numa perspetiva dialógica de construção do conhecimento matemático e alicerçada num modelo de ensino exploratório, destacando-se os momentos de discussão coletiva.

O estudo enquadra-se numa perspetiva de *design research*, adotando uma metodologia de experiência de ensino onde a investigadora assume, simultaneamente, o papel de professora. Participaram no estudo todos os alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade. Os métodos de recolha de dados foram a observação participante com gravação vídeo, a recolha documental e a entrevista clínica. Para a análise dos dados elaborou-se um quadro de categorias que contempla três domínios: processo de generalização, contextos de generalização e tipos de representação da generalização.

Os resultados do estudo evidenciam que a capacidade de generalização evoluiu no sentido da mudança de atenção dos casos particulares para os casos gerais, com crescente despreendimento do contexto específico das situações e progressiva apropriação da representação simbólica. No entanto, essa evolução não foi linear, estando dependente de certas características das tarefas. Assinala-se, ainda, a pertinência da conjetura formulada, revelando a forte interdependência entre os pensamentos relacional e funcional: a exploração da variação de quantidades, numa perspetiva relacional da aritmética, conduz à emergência da noção de variável e, num nível mais sofisticado, à relação de dependência entre variáveis.

Palavras-chave: pensamento algébrico, generalização, pensamento relacional, pensamento funcional, representações, discussão coletiva, experiência de ensino.

Abstract

This research aims to understand the development of grade 4 students' generalization ability, during a teacher experiment implemented for one school year, supported by a perspective of algebraic thinking development. In particular, on the one hand, it seeks to study how the students' generalization ability evolved in contexts of promotion of relational thinking and functional thinking and to understand the evolution of their ability for representing the generalization. On the other hand, it seeks to reflect about how the teaching experiment contributed to the development of students' algebraic thinking.

The teaching experiment was established on a conjecture with two dimensions. The mathematical content dimension based on a definition of algebraic thinking which assumes the generalization and their representation as central aspects, and considers situations that promote the development of relational thinking and functional thinking as contexts. The pedagogical dimension of the conjecture is framed on a dialogical perspective of the mathematical knowledge construction and it is grounded in an inquiry-based teaching, emphasizing the collective discussions with the class.

The study is based on a perspective of *design research*, adopting a methodology of teaching experiment where the researcher assumes also the teacher's role. All the grade 4 students in the class participated in the study. The methods of data collection were participant observation with video recording, documents' collection and clinical interviews. For the data analysis, a framework of categories with three domains was elaborated: process of generalization, generalization contexts and types of representation of the generalization.

The results show that the students' generalization ability evolved as their attention shifts from the particular cases to the general cases, with increasing detachment from the situations' contexts and increasing appropriation of symbolic representation. However, this evolution was not linear, being dependent on certain task characteristics. The study results also express the relevance of the formulated conjecture, showing the strong interdependence between relational and functional thinking: the exploration of variation of quantities, in a relational perspective of arithmetic, leads to the emergence of the notion of variable and, in a more sophisticated level, to the dependence relation between variables.

Keywords: algebraic thinking, generalization, relational thinking, functional thinking, representations, collective discussion, teaching experiment.

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Hélia Oliveira, por todo o apoio e confiança que sempre depositou em mim, pelo seu empenhamento, sugestões e críticas pertinentes… Acima de tudo, pelo imenso apreço de tê-la como orientadora e de conhecê-la como pessoa.

A todos os colegas e professores que durante este percurso contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional.

À professora Susana, pela sua confiança e imensa disponibilidade em participar neste estudo.

Aos alunos da turma do 4.º ano, com quem muito aprendi.

Aos amigos especiais, que foram companhia e alento.

Ao Bruno, pelo seu constante encorajamento e apoio.

Aos meus pais, pelo seu apoio incondicional e, especialmente, pelo seu grande exemplo.

À minha irmã, por todas as coisas que nos tornam companheiras de vida.

Aos meus sobrinhos, Sofia e Diogo, a quem dedico este trabalho, pela alegria de os ver crescer e pela confiança no seu futuro.

Índice

Índice de figuras

Índice de quadros

Capítulo 1 – Introdução

Neste capítulo apresento as motivações para o estudo e justifico a sua pertinência. Em seguida identifico os objetivos e questões de estudo. Na última secção explicito a forma como o estudo está organizado.

1.1. Motivações para o estudo

Tradicionalmente, na escola de 1.º ciclo do ensino básico, a aritmética ocupa um papel predominante no currículo da Matemática. De facto, os números e os cálculos algorítmicos têm tido primazia em detrimento da exploração de capacidades de pensamento de nível superior, como a generalização (Kaput, Carraher & Blanton, 2008). Esta capacidade é considerada por Kaput (1999) como intrínseca à atividade e pensamento matemáticos e, em particular, como aspeto central para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

A minha experiência enquanto professora do 1.º ciclo tem suscitado diversas interrogações sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. Geralmente, os alunos deste nível de ensino começam por revelar muito gosto e interesse pela aprendizagem da disciplina, sendo, para muitos deles, a sua área preferida. No entanto, ao longo da sua escolarização, alguns alunos vão perdendo esse gosto e, muitos deles, começam a apresentar dificuldades na sua aprendizagem. A relação entre a aprendizagem da Matemática e o seu ensino tem tido uma evidência crescente na investigação em Educação Matemática. Ao contrário de um ensino centrado em aulas expositivas e rotinas de treino de cálculos e procedimentos, a atividade matemática dos alunos dos primeiros anos deve ser mais rica e possibilitar elevar o seu nível de aprendizagens, pois, desde muito cedo conseguem pensar, relacionar e conjeturar sobre muitos aspetos da Matemática.

Este meu interesse particular pela área da Matemática surgiu desde a formação inicial pela opção de uma variante em ensino de Matemática e Ciências da Natureza e, mais tarde, traduziu-se na opção de realizar um trabalho de investigação, no âmbito do Mestrado em Ciências de Educação, enquadrado nas questões do ensino e aprendizagem da Matemática no 1.º ciclo. Nessa investigação centrei-me na relação entre as propostas de ensino e a aprendizagem dos alunos, mais concretamente no ensino e aprendizagem dos números decimais (Mestre, 2009).

Depois, com os acontecimentos da última década na Educação Matemática em Portugal, onde se inclui o Programa de Formação Contínua de Matemática para Professores do 1.º ciclo e o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (PMEB, ME, 2007), tive a possibilidade de aprofundar e incentivar este interesse pelas questões do ensinar Matemática nos primeiros anos. Frequentei durante dois anos o programa de formação referido e fui alertada para conceitos como o sentido do número e a forma como este promove uma aprendizagem contextualizada e significativa dos alunos desde o 1.º ano de escolaridade. Mais tarde, tive a possibilidade de integrar as turmas piloto na implementação do então novo programa e de aprofundar os meus conhecimentos didáticos sobre como ensinar esta disciplina.

Em particular, o meu interesse pelo pensamento algébrico no 1.º ciclo resultou de diferentes leituras sobre o ensino da Matemática nos primeiros anos e foi-se acentuando à medida que verificava como o desenvolvimento desta nova *forma de pensar* (Kieran, 2004; NCTM, 2000) poderia tornar mais integrador um currículo, muitas vezes, atomizado em conteúdos espartilhados e desconexos que os alunos apreendem de forma pouco significativa[1].

Das leituras iniciais por mim realizadas, destaco *Principles and standards for school mathematics do National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) ao apresentar a álgebra como um *fio condutor curricular* desde os primeiros anos de escolaridade e considerar que esta pode ser usada para unificar o currículo da Matemática. Neste documento é referido ainda que, desde cedo, pode ser construída uma base sólida centrada, por exemplo, nos números e nas suas propriedades que cimente o trabalho posterior com os símbolos e expressões algébricas, ou na experiência sistemática com padrões que poderá vir a desenvolver a compreensão da noção de função. Desta forma, como referem Carraher, Martinez e Schliemann (2008), é possível evidenciar o caráter algébrico do currículo matemático da escola elementar.

Neste sentido, a recente abordagem de investigação denominada *Early Algebra* promoveu uma nova visão da relação aritmética-álgebra, revelando o caráter algébrico da aritmética e questionando a prática corrente de ensinar primeiro aritmética e depois álgebra (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2003). Isso não significa introduzir a álgebra mais cedo na escolaridade. Em vez disso, trata-se de uma nova abordagem que perspetiva a construção dos conceitos algébricos a partir dos tópicos já existentes no currículo da matemática elementar, introduzindo-os através de problemas contextualizados e onde a notação formal é trabalhada gradualmente (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2007). Trata-se, assim, de algebrizar os

[1] Como, muitas vezes, acontece com a aprendizagem dos conceitos e procedimentos aritméticos, como os algoritmos, por exemplo.

conteúdos já existentes do currículo matemático da escola elementar, fazendo com que os conteúdos aritméticos se tornem mais algébricos à medida que a generalização é construída (Kaput, 2008).

Desta forma, a introdução do pensamento algébrico nos primeiros anos promove o desenvolvimento de formas particulares de pensamento (Cai & Knuth, 2005; Kieran, 2007; Radford, 2013) e requer, fundamentalmente, reformular o modo como a aritmética é ensinada nestes anos de escolaridade (Cai & Knuth, 2005).

Ao referir-se às investigações sobre a introdução da álgebra no ensino elementar, Kieran (2007) assinala que estas incidem sobre aspetos tais como: propriedades dos números e das operações, igualdades numéricas, mudança, padrões e relações entre quantidades e, embora não introduzam necessariamente as notações algébricas convencionais, permitem a utilização da linguagem natural e de outras representações para expressar ideias algébricas. Esta autora refere que o atual corpo de investigação nesta área enfatiza a aritmética conceptualizada de forma algébrica e assenta no pressuposto de que a compreensão da álgebra começa com a aprendizagem da aritmética. Salienta ainda que os resultados da investigação apontam para a necessidade de promover a generalização algébrica nos primeiros anos de escolaridade, sem que necessariamente se use a notação algébrica.

Também Blanton et al. (2007) referem que a investigação atual sobre a introdução da álgebra no ensino elementar centra-se fundamentalmente em dois pontos: o uso da aritmética como um domínio para a expressão e formalização de generalizações (generalização da aritmética) e generalização de padrões numéricos ou geométricos para descrever relações funcionais (raciocínio funcional). No entanto, os mesmos autores referem que é necessário construir ainda uma conceção mais integrada e coerente sobre as ideias essenciais sobre a álgebra nos primeiros anos e como estas ideias se podem relacionar com o currículo existente e, também, sobre o modo como se desenvolve o pensamento algébrico no aluno.

Embora muitos investigadores (e.g. Blanton & Kaput, 2005; Carpenter, Franke & Levi, 2003; Carraher, Schlieman & Brizuela, 2001; Kaput, 2008; Kieran, 2011; Radford, 2013; Russell, Schiffer e Bastable, 2011) reconheçam a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade, a pertinência da investigação nesta temática justifica-se, segundo Carraher e Schliemann (2007), por subsistirem ainda questões para as quais não existe uma resposta consensual: Quais as tarefas e formas de aprendizagem algébricas a promover nesses anos de escolaridade?; Que tipo de evidencias são necessárias para avaliar a presença do pensamento algébrico nos alunos mais novos?; e, Que abordagens pedagógicas e orientações curriculares são encorajadas?

Em Portugal, e em sintonia com estes resultados da investigação internacional, o PMEB (ME, 2007) representa uma inovação curricular ao reconhecer a importância da introdução do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade. Este enquadramento curricular permitiu a realização do presente estudo assente no desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade, centrando-se na evolução da capacidade de generalização e da sua representação, no decurso de uma experiência de ensino.

Desta forma, considero pertinente a realização desta investigação e aliado ao desafio pessoal que constitui, considero ainda que poderá contribuir para o desenvolvimento do conhecimento no campo da Educação Matemática ao proporcionar uma maior compreensão sobre a forma de como alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico, mais concretamente do 4.º ano de escolaridade, podem desenvolver o seu pensamento algébrico.

1.2. Objetivo e questões do estudo

Este estudo adota a definição de pensamento algébrico apresentada por Blanton e Kaput (2005), caracterizando-o como um "processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade" (p. 413). Desta forma, assume a generalização como aspeto central do desenvolvimento do pensamento algébrico e a sua representação em formas gradualmente mais simbólicas. Para além disso, consideram-se como contextos para a promoção da capacidade de generalização e, consequentemente, do pensamento algébrico, tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento relacional e do pensamento funcional.

O estudo foi conduzido através de uma metodologia de *design research*, mais concretamente, através da implementação de uma experiência de ensino, durante um ano letivo. A experiência de ensino foi orientada por uma conjetura, com uma dupla dimensão de conteúdo e pedagógica (Confrey & Lachance, 2000), relacionando o conteúdo matemático com a forma como é ensinado. A dimensão de conteúdo da conjetura assenta na definição de pensamento algébrico já referida, considerando a generalização e sua representação como aspetos centrais e as situações que fomentam o pensamento relacional e o pensamento funcional como contextos para a sua promoção. A dimensão pedagógica da conjetura alicerça-se numa perspetiva dialógica de construção do conhecimento matemático (Wells, 2000) e prende-se com a construção de um ambiente de sala de aula de natureza exploratória, onde as discussões coletivas assumem um papel preponderante.

Desta forma, o objetivo deste estudo é compreender como se desenvolve a capacidade de generalização dos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade, no decurso de uma experiência de ensino implementada durante o ano letivo de 2010/11, ancorada numa perspetiva de desenvolvimento do pensamento algébrico. Por um lado, procura-se compreender como se caracteriza e evoluiu a capacidade de generalização dos alunos ao longo da experiência de ensino. Por outro lado, procura-se refletir sobre a conjetura de ensino-aprendizagem formulada, na sua dupla vertente de conteúdo e pedagógica, e como a mesma contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Dada a centralidade atribuída à capacidade de generalização no que respeita ao desenvolvimento do pensamento algébrico, as questões de investigação centram-se na compreensão da evolução dessa capacidade em diferentes contextos (de promoção do pensamento relacional e do pensamento funcional) e na sua representação. Para além disso, procurar-se-á perceber quais os contributos da experiência de ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, tendo em conta as duas dimensões da conjetura.

Assim, foram definidas as seguintes questões de investigação:

1. Ao longo da experiência de ensino, como evoluiu:

a) a capacidade de generalização dos alunos em contextos de promoção do pensamento relacional?

b) a capacidade de generalização dos alunos em contextos de promoção do pensamento funcional?

c) a capacidade de representação da generalização dos alunos?

2. Como a experiência de ensino contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos?

O estudo foi conduzido durante um ano letivo, numa lógica de articulação curricular com os temas e tópicos matemáticos do currículo do 4.º ano de escolaridade.

1.3 Organização do estudo

Este estudo encontra-se organizada em oito capítulos. Após este primeiro capítulo referente à introdução, apresentam-se três capítulos que discutem as principais referências teóricas que orientaram o estudo. Os restantes quatro capítulos apresentam a parte empírica do estudo.

O capítulo 2 apresenta perspetivas sobre o pensamento algébrico, definindo-o e justificando a sua pertinência no 1.º ciclo do ensino básico. O capítulo 3 apresenta uma discussão alargada sobre o conceito de generalização enquanto aspeto central do pensamento algébrico, definindo-o como processo de raciocínio e caracterizando o seu desenvolvimento. Por fim, apresenta ideias relativas à representação da generalização e, em particular, ao processo de simbolização. O capítulo 4 é referente aos contextos de promoção do pensamento algébrico. Assim, carateriza o pensamento relacional e o pensamento funcional e aspetos particulares destes dois tipos de pensamento.

A dimensão empírica do estudo está organizada em quatro capítulos. O capítulo 5 é referente à metodologia e nele apresentam-se e justificam-se as opções metodológicas que orientaram o estudo, o contexto e participantes, o papel da investigadora, os métodos de recolha de dados e aspetos relativos aos critérios de qualidade. Descrevem-se ainda os processos de recolha e análise de dados usados no estudo. No capítulo 6 apresentam-se os aspetos relativos à experiência de ensino, descrevendo a conjetura que a orientou, os resultados do teste de diagnóstico aplicado aos alunos e as sequências de tarefas concretizadas. O capítulo 7 apresenta os resultados do estudo, centrando-se no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. O último capítulo – capítulo 8 – apresenta as conclusões do estudo. Começa por discutir a sistematização dos resultados e, em seguida, apresenta as respostas às questões de investigação que orientaram o estudo. Este trabalho termina com a referência a algumas considerações sobre os contributos e as limitações do estudo desenvolvido.

Capítulo 2 – Perspetivas sobre o pensamento algébrico

Neste capítulo apresento, numa primeira parte, a conceção de pensamento algébrico segundo várias referências teóricas e, em seguida, discuto a pertinência da sua implementação nos níveis elementares. Finalmente, apresento uma síntese dos aspetos discutidos neste capítulo com maior relevância para o presente estudo.

2.1 O que se entende por pensamento algébrico

Embora não seja fácil definir pensamento algébrico, Lins e Kaput (2004), por exemplo, consideram que há duas características próprias do pensamento algébrico que são consensuais: a primeira envolve atos deliberados de generalização e de expressão da generalização, e a segunda, envolve o raciocínio com formas de generalização estruturadas sintaticamente, incluindo ações guiadas sintática e semanticamente. O pensamento algébrico pode, assim, ser encarado como "um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade" (Blanton & Kaput, 2005, p. 413).

Carraher e Schliemann (2007) referem-se ao pensamento algébrico como um processo psicológico que envolve a resolução de problemas através de notações algébricas, mais ou menos formalizadas. De acordo com estes autores, uma compreensão profunda da aritmética exige a mobilização da generalização matemática, típica do tema álgebra.

Ponte (2006) refere que o pensamento algébrico inclui não só a capacidade de lidar com o cálculo algébrico e as funções mas também a capacidade de lidar com muitas outras estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios. Este autor acrescenta que no pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objetos, mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato.

Kaput (1999) definiu o pensamento algébrico em cinco diferentes formas inter-relacionadas: (a) generalização e formalização de padrões e restrições; (b) manipulação de formalismos sintaticamente guiada; (c) estudo de estruturas abstratas; (d) estudo de funções, relações e de variação conjunta; e (e) utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos. O autor refere que as duas primeiras formas estão subjacentes às outras três e que a última reflete a álgebra como teia de linguagem que permeia todas as outras.

O mesmo autor refere que as capacidades de generalização e formalização são intrínsecas à atividade e pensamento matemáticos. Defende que a generalização envolve deliberadamente a extensão do raciocínio ou comunicação para além do caso ou casos considerados, ou a elevação desse raciocínio ou comunicação para além do foco inicial, mais propriamente ao nível dos padrões, procedimentos, estruturas e suas relações. Considera ainda que o pensamento algébrico é composto por processos complexos de simbolização que servem propositadamente a generalização e o raciocínio com generalizações (Kaput, 2008).

De acordo com uma definição mais recente de Kaput (2008), são dois os aspetos centrais que caracterizam a álgebra: (A) álgebra como generalização simbólica de regularidades; (B) álgebra como raciocínio sintaticamente guiado e ações em generalizações expressas no sistema de símbolos convencional. Esta caracterização da álgebra funde-a em duas identidades: enquanto artefacto cultural expresso principalmente como um convencional sistema simbólico e como um certo tipo de atividade humana.

Há divergências sobre os papéis destes dois aspetos na Matemática escolar, discutindo-se qual deles deverá ser central para definir a álgebra. De acordo com Kaput (2008), alguns autores tratam as regras baseadas em ações de simbolismo como a marca do raciocínio algébrico, sirvam estas ações ou não generalizações ou modelação, e como tal não entendem as atividades desenvolvidas no ensino elementar como verdadeiramente algébricas. Outros, mais cautelosos com o que Piaget refere como formalismo prematuro, desvalorizam a sintaxe convencional em favor de outras expressões da generalização menos formais, como, por exemplo, a linguagem natural e o desenho. Só depois de os alunos vivenciarem bastantes experiências deste tipo é que são introduzidos na notação algébrica, gráficos e outras representações convencionais. Outros autores consideram ainda que o aspeto central B pode ser desenvolvido desde muito cedo. No início da aprendizagem da álgebra, os alunos são encorajados a procurar regularidades e a formular generalizações (aspeto central A) utilizando os seus próprios recursos, mas cedo são encorajados a fazer representações nas formas convencionais. A premissa subjacente é que as formas convencionais (notações algébricas, gráficos, linhas numéricas, tabelas e linguagem natural) podem não só expressar como também enriquecer e aprofundar o raciocínio algébrico dos alunos (Kaput, 2008).

Os dois aspetos centrais identificados por Kaput (2008) redefinem-se nas três vertentes seguintes: (1) o estudo das estruturas e sistemas abstratos a partir de cálculos e relações, incluindo os que decorrem da aritmética (álgebra como aritmética generalizada) e do raciocínio quantitativo; (2) o estudo das funções, relações e variação; e (3) a aplicação de uma linguagem de modelação dentro e fora da Matemática.

A primeira vertente enunciada baseia-se no caráter potencialmente algébrico da aritmética. Isso implica a construção da generalização a partir das relações numéricas e das operações aritméticas e suas propriedades. Inclui ainda a noção de equivalência associada ao sinal de igual (=). A vertente marcadamente mais aritmética torna-se mais algébrica à medida que se analisa mais explicitamente as diferentes propriedades e se constrói a sua generalização. A segunda vertente, relativa ao estudo das funções, relações e variação, envolve a exploração de padrões numéricos ou geométricos, diferentes tipos de variação e usa um conjunto diversificado de sistemas simbólicos como gráficos, tabelas e outros que mobilizem o pensamento funcional. A vertente relativa à modelação pode ser expressa em três diferentes tipos: equações, funções e parâmetros e depende da forma como é entendida a variável (Kaput, 2008).

Também Kieran (2007) considera que a álgebra não pode ser encarada apenas como uma técnica, mas também como uma forma de pensamento e raciocínio sobre as situações matemáticas. Esta ideia é também comungada por Cai e Knuth (2005) ao considerarem que o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos promove o desenvolvimento de formas particulares de pensamento. Lins e Kaput (2004) referem que uma caracterização ampla dos tipos de raciocínio algébricos ajuda a discutir quais as formas de pensamento algébrico adequadas para os alunos mais novos e as condições que devem ser promovidas para que o mesmo seja desenvolvido.

Neste sentido, Kieran (2004) refere que o pensamento algébrico nos primeiros anos envolve o desenvolvimento de formas de pensamento com atividades tais como: analisar relações entre quantidades, identificar estruturas, estudar a mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e prever. Esta autora refere também que as letras e os símbolos da álgebra podem ou não ser usados como uma ferramenta.

Nesta linha de pensamento, Ponte, Branco e Matos (2009) referem que aprender álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação. Também estão de acordo com Kieran ao afirmar que a manipulação simbólica é apenas uma das facetas da álgebra. Estes autores referem que o pensamento algébrico inclui três vertentes fundamentais: representar, raciocinar e resolver problemas. A vertente de representar diz respeito à capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representação, nomeadamente sistemas cujos caracteres primitivos têm uma natureza simbólica. Na segunda vertente – raciocinar – assumem especial importância o relacionar e o generalizar. Na terceira vertente – resolver problemas, que inclui modelar situações – trata-se de usar representações diversas de objetos algébricos para interpretar e resolver problemas matemáticos e de outros domínios.

Uma questão que se levanta quando falamos de pensamento algébrico é: qual a sua relação com o raciocínio algébrico? Kieran (2011) sublinha que ainda não foi feita a distinção entre "pensamento algébrico" e "raciocínio algébrico" e os diferentes autores adoptam uma ou outra denominação. As abordagens clássicas tendem a estudar o raciocínio matemático em termos das "formas de raciocínio", como o dedutivo, indutivo, abdutivo e analógico. Visto nesta perspetiva, usando as lentes da terminologia clássica do raciocínio matemático, segundo a autora, o termo raciocínio algébrico arrisca-se a ser interpretado em sentido muito restrito e esta autora prefere usar o termo pensamento algébrico, por considerar ser um termo mais amplo. Por esse motivo, esta autora enfatiza que o pensamento algébrico engloba os seguintes temas centrais: a) pensar sobre o geral no particular; b) pensar sobre regras em padrões; c) pensar relacionalmente sobre quantidades, números e operações numéricas; d) pensar representacionalmente sobre relações em situações problema; e) pensar conceptualmente sobre procedimentos; f) antecipar, conjeturar e justificar; e, g) gesticular, visualizar e exprimir numa linguagem.

Por outro lado, Radford (2006) refere que a dificuldade de definir pensamento algébrico reside no facto de este envolver um amplo conjunto de objetos algébricos (como, por exemplo, equações, funções, etc.), de processos matemáticos e ainda as várias abordagens de conceber o pensamento em geral. Considerando o pensamento algébrico como uma forma particular de refletir matematicamente, este autor argumenta que existem três elementos inter-relacionados que permitem a sua distinção em relação a outras formas de pensamento. O primeiro lida com o sentido de indeterminação que é próprio dos objetos algébricos como as incógnitas, variáveis ou parâmetros. É essa indeterminação (em oposição à determinação numérica) que torna possível, por exemplo, a substituição de um objeto variável ou incógnito por outro. O segundo elemento é o facto de os objetos indeterminados serem tratados analiticamente, ou seja, operar com eles como se fossem objetos conhecidos. E, o terceiro e último elemento refere-se à forma simbólica peculiar para designar os objetos. Assim, perceber, perante a formulação de uma generalização, se esta é ou não algébrica envolve atender a estes elementos.

2.2. A introdução do pensamento algébrico nos níveis elementares

O PMEB (ME, 2007) reconhece a importância da introdução do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade, em consonância com os resultados da investigação internacional, dos quais se destaca os estudos realizados no âmbito da *Early Algebra*. A abordagem *Early Algebra* promoveu uma nova visão da relação aritmética-álgebra, revelando o caráter algébrico da aritmética e questionando a prática corrente de ensinar primeiro aritmética e depois álgebra. São vários os estudos (e.g. Blanton & Kaput, 2005; Carpenter, Franke & Levi, 2003; Carraher et al., 2007; Fujii & Stephens, 2008; Warren & Cooper, 2005) que demostram como os alunos dos primeiros anos de escolaridade são capazes de pensar algebricamente.

Carraher et al. (2007) elucidam que a *Early Algebra* não significa simplesmente o ensino da álgebra mais cedo, é antes uma nova abordagem que envolve uma mudança conceptual que se carateriza pelas seguintes perspetivas: i) a *Early Algebra* constrói-se a partir de problemas contextualizados que permitam aceder à compreensão dos conceitos mais abstratos; ii) a notação formal é introduzida gradualmente; e, iii) a *Early Algebra* entrelaça-se fortemente com os tópicos que já integram o currículo da matemática elementar. Desta forma, a questão a colocar-se nesta abordagem da *Early Algebra* não é "quando", mas antes "o quê", "porquê" e "como". Estas questões enfatizam a ideia de uma nova visão em que a aritmética faz parte da álgebra (Figura 2.1). Isso não significa que todas as ideias, conceitos e técnicas aritméticas sejam manifestamente algébricas, mas que são potencialmente algébricas. Esta perspetiva impele-nos a considerar que os tópicos ou conceitos isolados da aritmética podem fazer parte de ideias e conceitos mais gerais e abstratos.

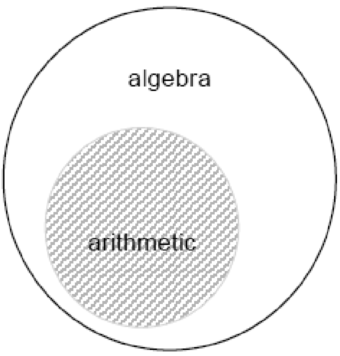


Figura 2.1 – A aritmética como parte da álgebra (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2003, p. 9).

Cai e Knuth (2005) defendem a introdução de ideias algébricas nos primeiros anos e argumentam que isso requer, fundamentalmente, reformular o modo como a aritmética deve ser ensinada nesses anos de escolaridade. De facto, numa perspetiva mais tradicional do ensino da matemática tem sido dada primazia ao cálculo e aos algoritmos, e como referem Kaput et al. (2008), a aritmética que habitualmente é ensinada na escola elementar desvaloriza o desenvolvimento da capacidade de generalização embora os alunos sejam capazes de pensar sobre estrutura e relações antes de serem ensinados a usar símbolos algébricos. Por exemplo, quando é pedido aos alunos para determinarem se a soma de dois números ímpares será par ou impar, eles podem fazer previsões e justificá-las em termos de propriedades dos números sem usarem os símbolos algébricos. Estes autores acrescentam, também, que a ênfase no desenvolvimento de pensamento de nível superior, como a generalização, não implica a diminuição da importância das capacidades de rotina como a fluência de cálculo. Pelo contrário, as atividades algébricas proporcionam contextos ricos e significativos nos quais os alunos podem praticar a fluência de cálculo.

Como foi referido, a introdução do pensamento algébrico na escola elementar acarreta novas visões sobre a aritmética e a álgebra e sobre a forma como estas se relacionam, sendo possível construir uma ponte entre elas (Carraher & Schliemann, 2007). Nesta perspetiva, Russell, Schiffer e Bastable (2011) identificaram quatro atividades matemáticas que podem constituir a referida ponte: compreensão do comportamento das operações, generalização e justificação, extensão do sistema numérico e a utilização da notação com significado. Também estes autores argumentam que este tipo de atividades matemáticas tem também o potencial de fortalecer os alicerces do cálculo para todos os alunos, pois providenciam "um meio para os alunos reexaminarem e obterem uma compreensão fortemente alicerçada sobre o significado das operações e formas de pensar em matemática" (p. 67).

Também Rivera (2006) sugere que os sistemas numéricos devem ser ensinados de tal forma que os alunos percebam as propriedades ou relações numéricas existentes em objetos individuais para, de forma progressiva, verificarem que estas são invariantes independentemente dos objetos de que partiram. As regularidades que os alunos encontram nas operações aritméticas podem constituir a base para a exploração da generalização sobre os números e operações e também de práticas como a formulação, o teste e a prova dessa generalização. Bastable (2007) refere-se a essas práticas como centrais para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

No entanto, a investigação sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico no 1.º ciclo é recente e muitos professores e investigadores podem duvidar que alunos tão novos sejam capazes de realizar aprendizagens em álgebra ou, quando confrontados com estudos onde isso acontece, questionar se os problemas trabalhados e as resoluções apresentadas pelos alunos serão verdadeiramente de natureza algébrica. Outros ainda poderão considerar irrealista enquadrar a álgebra num currículo já construído (Kaput et al., 2008).

Relativamente à primeira questão e de acordo com Kaput et al. (2008), em vez de questionar se os alunos estão preparadas para a álgebra, talvez seja pertinente perguntar que tipo de conceitos algébricos podem os alunos aprender para promover o pensamento algébrico. Esta ideia é consistente com a perspetiva de Vigotsky de que a aprendizagem precede e facilita o desenvolvimento. Assim, trabalhar com os alunos com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico pode promover e facilitar o desenvolvimento da aprendizagem da álgebra.

Por outro lado, pode considerar-se que o ensino da álgebra deve ser feito apenas após o ensino da aritmética. Esta conceção assenta no pressuposto que a álgebra procede a aritmética. No entanto, Kaput et al. (2008) questionam esse pressuposto argumentando que a própria aritmética pode ser ensinada numa perspetiva mais algébrica.

Relativamente à questão que pode ser colocada por alguns professores e investigadores mais céticos sobre a introdução da álgebra num currículo já muito extenso, Kaput et al. (2008) referem que essa introdução não precisa necessariamente de estender o currículo matemático. Em vez disso, pretende-se trabalhar os tópicos já existentes com maior profundidade, de forma a destacar a capacidade de generalização. Dito de outra forma, trata-se de, como referem Carraher et al. (2008), evidenciar o caráter algébrico do currículo matemático da escola elementar. Nesta perspetiva a introdução da álgebra poderá unificar o currículo já existente através de um número pequeno de amplos conceitos, tornando-o numa experiência matemática interligada. Como refere o NCTM (2000), o pensamento algébrico pode ser usado como *fio condutor curricular* para unificar o currículo de matemática dos primeiros anos.

Quanto ao pressuposto de serem consideradas como algébricas resoluções que não envolvam as regras sintáticas da álgebra, Kaput et al. (2008) defendem uma visão mais ampla do raciocínio simbólico. Para eles, o raciocínio simbólico inclui, mas não é restrito à escrita algébrica. Tanto a escrita algébrica como a linguagem natural são simbólicos e ambos podem expressar generalizações. Estes autores referem que embora a escrita algébrica tenha virtudes distintas da linguagem natural - é sucinta e mais adequada para futuras análises e derivações - a expressão em linguagem natural tem também os seus méritos: pode conter informação sobre o contexto que é ausente da expressão algébrica. De facto, a linguagem natural serve como um importante ponto de partida para os alunos aprenderem álgebra porque lhes permite começar a encontrar sentido e a descrever conceitos algébricos usando uma linguagem conhecida (Kaput, 2008).

O facto de o currículo matemático tender a ser uma coleção de tópicos isolados, é, aliás, outro facto que torna pertinente o tratamento do pensamento algébrico na escola elementar. Isso pode resultar em formas de tratar os conceitos matemáticos, especialmente os mais abstratos, de modo inter-relacionado. Muitos significados derivam das conexões com outros conceitos e isso deve ser explorado com os alunos. Em ordem a corrigir a natureza fragmentada do currículo é necessário ter uma perspetiva de desenvolvimento a longo termo que não se confine a determinados tópicos (Kaput, 2008).

A introdução do pensamento algébrico pode ser um contexto especial para examinar como as ideias e métodos da matemática elementar estão relacionados com outros que são tratados em anos mais avançados. Não se pretende, contudo, defender a ideia de que a aprendizagem matemática segue uma trajetória fixa, mas assume-se a dependência do desenvolvimento dessa aprendizagem com a estrutura curricular e as abordagens de ensino.

Desta forma, a introdução da álgebra no ensino elementar não deve ser considerada numa perspetiva de mais um tema que se adiciona ao currículo, separado das restantes áreas. Trata-se, pelo contrário, de um tema integrador que pode ser entendido como uma forma de pensamento que aporta significado, profundidade e coerência à aprendizagem dos outros temas e, acima de tudo, à aprendizagem da matemática (NCTM, 2000). Assim, os conteúdos de carácter algébrico a serem trabalhados não serão os mesmos que nos anos sequenciais, ainda que tendo uma complexidade inferior (Blanton et al., 2007; Carraher & Schliemann, 2007). Embora os alunos dos primeiros anos possam aprender a usar algum simbolismo característico da álgebra, o que importa é que estes alunos aprendam a raciocinar algebricamente e que comecem a usar essa simbologia para expressar e justificar as suas ideias, de forma a desenvolver esse mesmo raciocínio.

Como foi referido, também o NCTM (2000) considera a álgebra como um *fio condutor curricular* desde os primeiros anos de escolaridade e refere que esta pode ser usada para unificar o currículo da matemática. De acordo com *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2000), relativamente à aprendizagem da álgebra, todos os alunos do 3.º ao 5.º anos, devem:

- Compreender padrões, relações e funções;
- Descrever, ampliar e fazer generalizações sobre padrões geométricos e numéricos;
- Representar e analisar padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos;

- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- Identificar propriedades como a comutatividade, associatividade e a distributividade, e aplicá-las aos cálculos com números inteiros;
- Representar a noção de variável, enquanto quantidade desconhecida, através de uma letra ou um símbolo;
- Expressar relações numéricas através de equações;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Modelar situações problemáticas, usando objetos, e recorrer a representações como gráficos, tabelas e equações para tirar conclusões.
- Analisar a variação em diferentes contextos;
- Investigar a forma como a variação de uma variável se relaciona com a variação de uma segunda variável;
- Identificar e descrever situações com taxas de variação constante ou variáveis e compará-las. (p. 182)

Em Portugal, o PMEB (ME, 2007), também considera a álgebra como forma de pensamento desde os primeiros anos e sugere a seguinte abordagem:

> A exploração de situações relacionadas com regularidades de acontecimentos, formas, desenhos e conjuntos de números é importante neste ciclo. Os alunos devem procurar regularidades em sequências de números finitas ou infinitas (estas usualmente chamadas sucessões), e podem também observar padrões de pontos e representá-los tanto geométrica como numericamente, fazendo conexões entre a geometria e a aritmética. Este trabalho com regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, ajuda a desenvolver a capacidade de abstração e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico. (p. 14)

Esta abordagem está em sintonia com as tendências internacionais já referidas, valorizando a introdução do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade. Embora, no 1.º ciclo não surja de forma explícita o tema álgebra, existem referências de como as ideias algébricas podem ser trabalhadas logo desde os primeiros anos. Na introdução ao tema álgebra no 2.º ciclo, o PMEB (ME, 2007) refere que, no 1.º ciclo, o desenvolvimento do pensamento algébrico se pode promover quando os alunos "investigam sequências numéricas e padrões geométricos" (p. 40), e que a aprendizagem das estruturas multiplicativas e dos números racionais feita nesse nível de escolaridade constitui "uma base para o desenvolvimento da noção de proporcionalidade" (idem).

2.3 Síntese

Neste estudo assume-se a conceção de pensamento algébrico apresentada por Blanton e Kaput (2005), enquanto "processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade" (p. 413). As diferentes noções de pensamento algébrico apresentadas pelos diversos autores são consonantes no papel central que atribuem à generalização e à expressão da generalização, com representações mais ou menos formais.

Salienta-se a analogia que é feita à álgebra como forma de pensamento e a sua particular relevância nos primeiros anos de escolaridade (Kieran, 2007; Cai & Knuth, 2005). Assim, aprender álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Considera-se ainda, a importância dos temas centrais do pensamento algébrico identificados por Kieran (2011): pensar sobre o geral no particular; pensar sobre regras em padrões; pensar relacionalmente sobre quantidades, números e operações numéricas; pensar representacionalmente sobre relações em situações problema; pensar conceptualmente sobre procedimentos; antecipar, conjeturar e justificar; e, gesticular, visualizar e exprimir numa linguagem. Salienta-se também a pertinência dos três elementos interrelacionados que distinguem o pensamento algébrico de outras formas de pensamento, identificados por Radford (2006): indeterminação, analiticidade e representação simbólica.

O estudo que se apresenta insere-se no âmbito do PMEB (ME, 2007) que preconiza a exploração do pensamento algébrico desde o 1.º Ciclo. Releva-se a importância da articulação curricular com outros temas e tópicos, entendendo-se o pensamento algébrico como *fio condutor curricular* (NCTM, 2000), o que permite tornar o currículo mais unificado e interligado (Kaput et al., 2008). Salienta-se a importância do contexto da aritmética como tema promissor, embora não exclusivo, para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos elementares.

Capítulo 3 – A generalização como aspeto central do pensamento algébrico

Considerando a definição de pensamento algébrico assumida neste estudo, dois aspetos são considerados centrais: a generalização e a representação da generalização.

No primeiro ponto deste capítulo apresento considerações relativas ao conceito de generalização, integrando-o como processo de raciocínio matemático e, com principal foco, como aspeto central no desenvolvimento do pensamento algébrico. Desta forma, começo por definir o conceito de generalização de acordo com a perspetiva de diferentes autores, salientando as suas características principais. Em seguida, no segundo ponto, reporto-me ao processo de desenvolvimento da generalização, com a identificação de diferentes tipos e níveis, de acordo com alguns autores.

O terceiro ponto deste capítulo é relativo à importância da representação da generalização. Apresento algumas considerações sobre a noção de representação e sua caracterização. Por fim, apresento a simbolização matemática enquanto um dos tipos de representação na sua relação com a expressão da generalização.

A concluir, uma síntese dos aspetos tratados neste capítulo que constituíram referências teóricas principais no estudo que se apresenta.

3.1 A generalização

A generalização é considerada como um importante processo do raciocínio matemático (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008; Lannin, Ellis & Elliot, 2011; Mata-Pereira & Ponte, 2013) que parte de uma conclusão ou conjetura específica para formular uma conjetura de âmbito mais geral.

Neste sentido, Lannin et al. (2011) consideram que o raciocínio matemático envolve o desenvolvimento, a justificação e a utilização da generalização matemática. Para estes autores, o raciocínio matemático é um processo que envolve conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos e propõem o seguinte modelo para análise do processo de raciocínio matemático dos alunos:

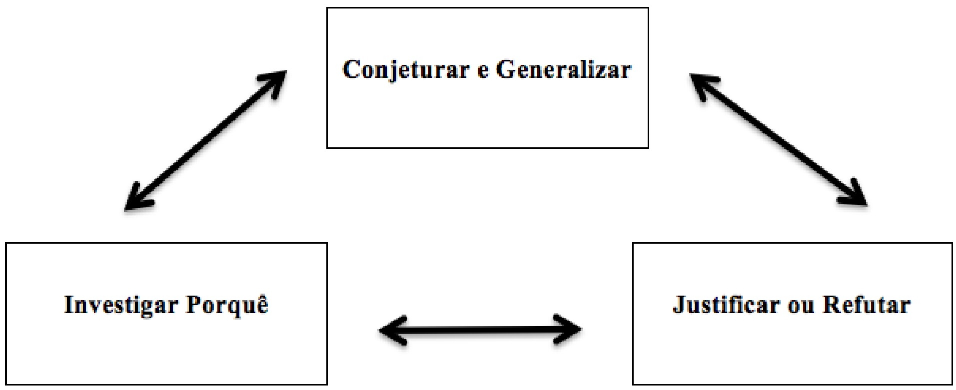


Figura 3.1 – Modelo do processo de raciocínio (Lannin et al., 2011, p. 11).

Considerando o processo como não linear, estes autores descrevem-no da seguinte forma: 1) o processo de raciocínio pode começar com a formulação de uma conjetura ou de uma generalização, por parte dos alunos; 2) em seguida, os alunos examinam várias razões do porquê das suas conjeturas serem ou não válidas; 3) a partir daí, os alunos podem justificar o porquê da validade das suas conjeturas, levando-os à possível revisão da conjetura inicial. Tendo em conta que o processo pode não ser sequencial, os alunos podem mover-se de diferentes formas neste processo de conjeturar e generalizar, investigar porquê e justificar ou refutar.

Para cada um destes aspetos, Lannin et al. (2011) apresentam um conjunto de compreensões essenciais necessárias aos alunos para se envolverem no processo de raciocínio. Assim, no primeiro aspeto relativo ao conjeturar e generalizar, assinalam que: a) conjeturar envolve raciocinar sobre as relações matemáticas para desenvolver afirmações que podem ou não ser verdadeiras; b) generalizar envolve identificar a comunalidade entre os casos ou estender o raciocínio para além do domínio inicial; c) generalizar envolve identificar a aplicabilidade dessa generalização reconhecendo o domínio relevante; e d) conjeturar e generalizar envolvem usar e clarificar o significado dos termos, símbolos e representações. Relativamente ao segundo aspeto do raciocínio identificado no modelo, os autores esclarecem que investigar porquê envolve investigar vários fatores possíveis que possam explicar porque é que a generalização é verdadeira ou falsa. No último aspeto do modelo, relativo ao justificar e refutar referem que: a) uma justificação matemática é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas; b) uma refutação matemática envolve demonstrar que uma declaração particular é falsa; c) justificar e refutar envolve avaliar a validade dos argumentos; e, d) uma justificação matemática válida de uma declaração geral não pode basear-se em argumentos de autoridade, perceção, senso comum ou em exemplos.

Também Mata-Pereira e Ponte (2013) apresentam um modelo conceptual para o estudo do raciocínio matemático. Neste modelo, a generalização é caracterizada sobretudo pela formulação de conjeturas gerais a partir de casos específicos (Figura 3.2).

Figura 3.2 – Processos de raciocínio e sua relação com representar e significar (Mata-Pereira & Ponte, 2013, p. 242).

O raciocínio corresponde à zona central do quadro, identificando os processos que o compõem. Estes processos não seguem, necessariamente, a ordem apresentada. Pois, como também referem Lannin et al. (2011) no quadro conceptual que apresentam, os processos não são lineares. Assim, de acordo com Mata-Pereira e Ponte (2013) "os alunos podem testar casos específicos formulando uma conjetura apenas posteriormente ou formular conjeturas específicas ou gerais sem formularem explicitamente questões" (p. 242). Saliente-se ainda que o quadro conceptual apresentado por estes autores considera a representação e a significação como suportes fundamentais ao raciocínio matemático.

Considerando a generalização como processo do raciocínio matemático, esta pode ser caraterizada como uma regra geral sobre um conjunto de dados, ou seja, "uma afirmação de que uma propriedade ou técnica é válida para um conjunto de objetos matemáticos" (Carraher et al., 2008, p. 3). Por exemplo, a afirmação "A soma de um número ímpar e de um número par é sempre ímpar" é uma generalização matemática porque sintetiza uma relação fundamental entre um conjunto de dados (aqui, os dados referem-se a números inteiros). Esta afirmação descreve o que acontece quando adicionamos *qualquer* número ímpar com *qualquer* número par. Para Blanton (2008), o objetivo central do pensamento algébrico é conseguir que os alunos pensem sobre, descrevam e justifiquem o que acontece *em geral* numa situação matemática. Ou seja, pretende-se que os alunos desenvolvam a generalização: *uma afirmação* que descreva uma verdade geral matemática sobre um determinado conjunto de dados.

Mason (1996) releva a importância da generalização considerando-a metaforicamente como *o coração da Matemática*. Para além disso, este autor refere que generalizar faz parte de um poder natural dos alunos e que "todos os alunos quando começam a escola já exibem o poder de generalizar e abstrair a partir de casos particulares" (Mason, Graham & Johnston-Wilder, 2005, p. 2). Assim, a expressão da generalização é inteiramente natural, prazenteira e uma ferramenta que o ser humano usa para fazer sentido do mundo que o rodeia. No entanto, estes autores salientam que, embora generalizar seja natural, os alunos precisam de tempo para apreender o seu sentido de generalidade e para o expressar, fortalecendo e estendendo esse poder natural.

Mason (1996) refere ainda que a generalização é tão central em toda a Matemática que muitos professores podem não referir a sua presença por a considerarem tão elementar. Quando um professor apresenta um exemplo de uma situação, para ele trata-se de um caso particular de uma situação mais geral, mas para o aluno esse exemplo pode ser considerado como a totalidade, não encarado como uma ilustração da generalidade, mas a generalidade em si mesma. Por exemplo, a expressão "$3 + 2 = 2 + 3$" pode ser entendida como ambos os lados da igualdade serem iguais a cinco, o que é diferente de se entender tratar-se da propriedade comutativa da adição de números inteiros. Procurando salientar o papel central da generalização numa aula de Matemática, Mason et al. (2005) chegam a afirmar que "uma aula onde os alunos não tenham tido a oportunidade de expressar a generalidade não é uma aula de Matemática" (p. ix).

Neste sentido, Ponte et al. (2009) também assinalam a generalização como um elemento central do pensamento algébrico e referem ainda que as tarefas envolvendo generalizações, para além de promoverem a capacidade de abstração, visam também desenvolver a capacidade de comunicação e o raciocínio matemático.

De acordo com Kaput (1999), a generalização envolve deliberadamente a extensão do alcance do raciocínio para além do caso ou casos considerados, o que implica a identificação e exposição explícita da comunalidade entre casos, elevando o raciocínio para um nível onde o foco não é tanto o caso ou as situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimentos, estruturas e as relações entre eles.

Também Malara (2012) considera que o processo de generalização envolve uma sequência de ações de pensamento que conduzem o sujeito a reconhecer, pela análise dos casos individuais, a ocorrência de elementos peculiares comuns, e a mudar a sua atenção dos casos individuais para a totalidade dos casos possíveis, estendendo a essa totalidade as características comuns previamente identificadas. Refere ainda que a chave desse processo não é tanto a identificação de similaridades entre os casos, mas a mudança de atenção dos casos individuais para os casos possíveis, mais gerais.

Embora estas perspetivas tenham em comum a procura da comunalidade entre casos particulares para generalizar, Mason (1996) considera também a importância do processo contrário: encontrar o particular no geral. Este autor refere que uma das formas de desenvolver a capacidade da generalização é sensibilizar para a distinção entre *olhar para* e *olhar através*, o que conduz a experiências como *ver a generalidade a partir do particular* e *ver o particular no geral*. Neste sentido, o autor refere que, de mãos dadas com a generalização encontra-se a particularização, ou a especialização, conceito de Polya. A particularização pode ser uma forma de encontrar sentido e permitir a reconstrução do geral a partir de exemplos concretos desse geral. Generalização e particularização são, assim, duas faces de uma mesma moeda.

Radford (2008, 2010, 2013) salienta um aspeto de especial importância ao afirmar que nem todas as generalizações são algébricas, podem ser generalizações aritméticas que fazem uso do raciocínio recursivo. Para o autor, pensar algebricamente é mais do que pensar sobre o geral e a generalização algébrica é constituída por níveis diferentes, uns mais profundos do que outros. Sugere que, por exemplo, a generalização algébrica de padrões reside na capacidade de, ao evidenciar uma característica comum em alguns elementos de uma sequência, analisar se essa característica aparece em todos os termos dessa sequência e conseguir providenciar uma expressão direta para qualquer um dos termos dessa sequência. A construção dessa expressão direta que permite obter qualquer termo de uma sequência exige a elaboração de uma regra. Assim, considera como ponto crucial a ter em conta na generalização a capacidade de apreender a semelhança (ou comunalidade) e a diferença (Radford, 2008). Para este autor, a emergência do pensamento algébrico não é caraterizada pela utilização da notação, mas antes pela forma como a comunalidade é apreendida. Desta forma, o autor define a generalização algébrica do seguinte modo:

> Generalizar algebricamente um padrão reside na capacidade de agarrar [*grasping*, no original] a comunalidade noticiada em alguns casos particulares (digamos p_1, p_2, p_3,..., p_k), estendendo ou generalizando essa comunalidade para todos os termos sub-

sequentes (p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3},...), e ser capaz de usar a comunalidade para fornecer uma expressão direta para qualquer termo da sequência. (Radford, 2008, p. 83)

Há diferentes aspetos envolvidos nesta definição. Primeiro, a comunalidade local, digamos *C*, é percecionada em alguns membros da sequência, *S*. Como mencionado antes, isso requer que se faça uma escolha entre o que conta como semelhante e como diferente. Em segundo, a comunalidade *C* é depois generalizada para todos os termos da sequência. Embora a generalizada comunalidade *C* seja ainda o que Pierce (1931, citado em Radford, 2008) chama de abdução - isto é, uma previsão geral, apenas algo plausível – ela vai ser testada como hipótese e, na última parte do processo de generalização, ela torna-se a *garantia* para a dedução de expressões de elementos da sequência que se mantém para além do campo percetual. A expressão direta dos termos da sequência requer a elaboração de uma regra baseada em quantidades indeterminadas, ou seja, variáveis. A Figura 3.3 sumariza a arquitetura da generalização algébrica de padrões, de acordo com Radford (2008):

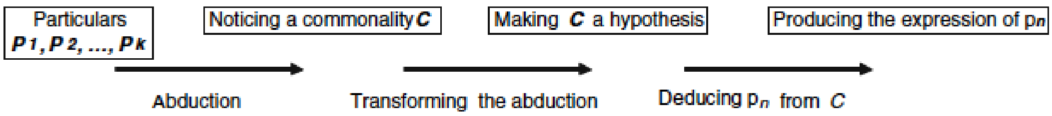


Figura 3.3 – Arquitetura da generalização algébrica de padrões, (Radford, 2008, p. 85).

Radford (2008) distingue, então, o que considera ser uma generalização algébrica de uma generalização aritmética. Quando as abduções realizadas não resultam da identificação de uma comunalidade entre os elementos acessíveis da sequência, podendo resultar, por exemplo, de um método de adivinhação ou de tentativa e erro; elas não conduzem a uma regra que expresse a generalização de forma dedutiva, mas antes a uma regra obtida por indução, ou seja, um procedimento baseado num raciocínio possível, não proveniente das premissas elaboradas. Este tipo de indução é aquilo que Radford chama de *indução naïve*. Neste caso, a estrutura é muito simples:

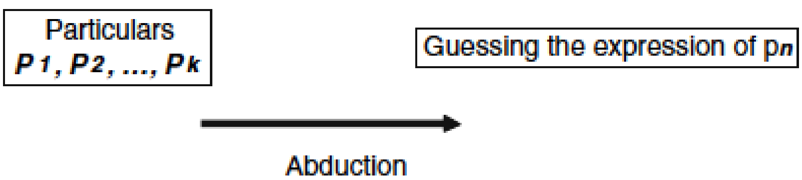


Figura 3.4 – Arquitetura da indução naïve (Radford, 2008, p. 86).

Embora a generalização daqui decorrente possa ser expressa num sistema alfanumérico, próprio da notação algébrica, ela não é algébrica. Desta forma, não é a notação que torna a generalização algébrica, mas antes a forma como esta é pensada. Por outro lado, encontrar uma característica comum em poucos termos particulares de uma sequência não é apenas o resultado de um ato contemplativo (Radford, 2006, 2010). A capacidade de reparar nas diferenças entre os objetos é uma das nossas capacidades cognitivas básicas. Sem ela, seríamos incapazes de classificar a imensidão de estímulos sensoriais que recebemos do exterior e o mundo seria reduzido a uma massa visual, táctil, fónica, ..., amorfa. Para além disso, reparar nas diferenças e semelhanças de um padrão tem também influências culturais, sociais e históricas. Assim, em vez de ser um mero ato contemplativo e óbvio, encontrar uniformidade em alguma coisa é um processo cognitivo e cultural complexo.

Naturalmente que não interessa apenas aquilo que se vê de forma material através da perceção do particular. Pretende-se ir além do particular para encontrar algo geral, conceptual e tentar encontrar sentido nisso. Este processo de encontrar o conceito e o seu sentido, insere-se na *teoria de objetivação do conhecimento* (Radford, 2006, 2008, 2010, 2011). Radford (2008) chama de objetivação o processo de tornar os objetos do conhecimento aparentes, ou seja, *facere obiectare* (Radford, 2006). Esta ideia de objetivação está embebida na ontologia de que os conceitos ou objetos do conhecimento são feitos a partir de níveis de generalização, ou seja, assenta numa premissa de que o conhecimento conceptual de um certo objeto é concomitante com os níveis de generalização através dos quais conseguimos lidar com esse objeto. Para objetivar alguma coisa é necessário inseri-la no mundo da (re)presentação, isto é, estar integrada num processo semiótico. Quando se fala em generalização, deve ter-se em conta dois aspetos: o que é generalizado (objeto de generalização) e o objeto generalizado. Radford (2010) sugere ainda que o processo que vai de um ao outro aspeto inclui dois componentes interrelacionados. O primeiro diz respeito à identificação da característica comum em alguns termos particulares e o segundo à formação do conceito geral pela generalização da característica comum identificada a todos os termos da sequência. Para generalizar um padrão de forma algébrica, o autor sugere um terceiro componente: que o objeto generalizado se cristalize num esquema, ou seja, uma regra que providencie uma expressão para qualquer termo da sequência. Assim, por exemplo, a generalização algébrica de um padrão implica: 1) apreender a comunalidade, 2) generalizar a comunalidade a todos os termos da sequência, e 3) formular uma regra que permita determinar qualquer termo da sequência.

De forma a tornar mais explícita a distinção entre generalização algébrica e indução naïve, apresenta-se, em seguida, uma explicação pormenorizada de um estudo de Radford

(2008). A tarefa seguinte de exploração de uma sequência crescente (Figura 3.5) foi apresentada a uma turma de 8.º ano de escolaridade.

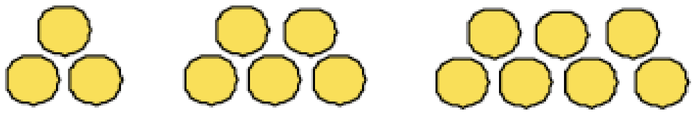


Figura 3.5 – Tarefa explorada numa turma de 8.º ano (Radford, 2008, p. 85).

Primeiramente foi pedido aos alunos, em pequenos grupos, que continuassem a sequência até ao quinto termo e depois que calculassem o número de círculos das figuras n.º 25 e n.º 100. Por último, foi-lhes solicitado que descobrissem a expressão para qualquer número de círculos da figura. Num dos grupos, uma aluna referiu que o número de círculos poderia ser calculado adicionando o número da figura duas vezes e depois adicionando um. Para explicar a ideia aos seus colegas do grupo, a aluna reportou-se às três primeiras figuras da sequência: “Devias fazer um mais um, mais um; dois mais dois, mais um; três mais três, mais um...”. depois, ela concluiu: “Tu adicionas [o número de] a figura por ela mesma (...), e depois disso, adicionar um” (p. 84), conduzindo o grupo à expressão $(n + n) + 1$.

Radford (2008) refere que, neste exemplo particular, a aluna inferiu a comunalidade C a partir de casos particulares. Depois, essa comunalidade foi (implicitamente) generalizada para os restantes termos da sequência. A abdução C torna-se numa hipótese e depois a regra é determinada. Assim, a partir da suposição de que C é verdadeira, a expressão $(\mathrm{n} + \mathrm{n}) + 1$ deve ser também verdadeira. Esta é uma demonstração da generalização algébrica de padrões já referida anteriormente.

Muitas vezes, para lidar com padrões deste tipo, os alunos recorrem a um método baseado na adivinhação da regra. Por exemplo, depois de perceberem que eram três, cinco e sete círculos, respetivamente, nos primeiros três termos da sequência apresentada na Figura 3.5, um grupo de alunos tentou a regra “o número mais dois” ou $n + 2$, a qual funcionou para o primeiro termo, mas não para o segundo. Depois, estes alunos mudaram a regra para $2n + 2$, experimentando que a mesma não resultava e chegando à regra correta $2n + 1$. A questão que Radford (2008) coloca é se este procedimento é uma generalização algébrica de padrões. Verificando a definição de generalização algébrica já apresentada, o que os alunos fizeram foram três abduções consecutivas, mas nenhuma delas conduziu à apreensão de uma comunalidade entre as três primeiras figuras. As abduções foram, de facto, simples adivinhações. Este procedimento é aquilo que Radford (2006, 2008, 2010) chama de *indução naïve*, distinguindo-o de outros tipos mais sofisticados de indução.

No entanto, Rivera e Becker (2007a) apresentam uma perspetiva diferente do processo de generalização, considerando que os papéis da abdução e da indução são particularmente importante. Para estes autores, as primeiras conjeturas que os alunos podem fazer a partir da abdução ou da indução, podem, se testadas, conduzir a generalizações algébricas.

Considerando três tipos de raciocínio – dedutivo, indutivo e abdutivo –, Rivera e Becker (2007a) apresentam a seguinte esquematização das relações entre eles e a natureza do conhecimento que produzem (Figura 3.6).

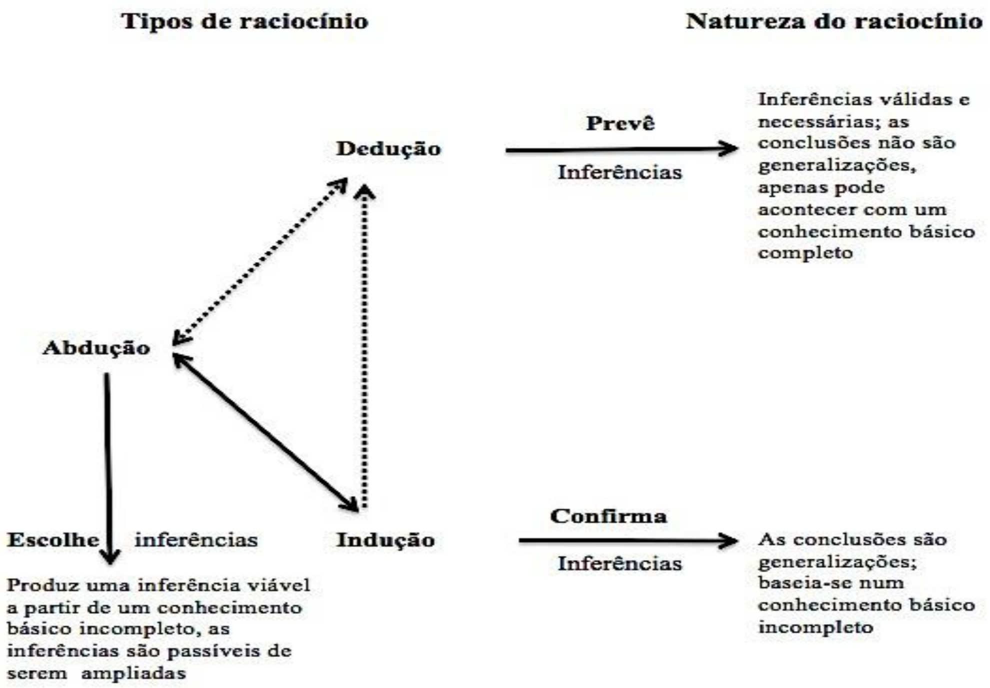


Figura 3.6 – A relação entre abdução, indução e dedução, de acordo com Rivera e Becker (2007a, p. 143).

A abdução e a dedução distinguem-se num aspeto importante. A dedução produz sempre conclusões verdadeiras porque parte de premissas verdadeiras, sem necessitar de verificações empíricas. A abdução, por outro lado, produz inferências falíveis e passíveis de serem ampliadas, são apenas hipóteses plausíveis. Assim, algumas conclusões produzidas pela abdução podem não ser verdadeiras, outras podem ser fracas conclusões. As abduções que resultam em ampliações podem ser analogias ou inferências causais. Por outro lado, como refere Abe (2003, citado em Rivera & Becker, 2007a) na dedução não há lugar a descoberta porque não parte de conhecimento incompleto, enquanto a abdução (e a intuição, de certa forma) implica a síntese de raciocínio na forma de uma descoberta.

A distinção entre abdução e indução é um pouco mais difícil de concretizar. A abdução pode ser vista como sendo anterior à indução. A abdução é o "combustível" para a produção de conjeturas (possivelmente falíveis) que conduzem à adoção de hipóteses testáveis. Depois, a indução testa as hipóteses através da experiência. Como refere Abe (2003, citado em Rivera & Becker, 2007a): "a indução pode ser formalizada como a generalização dos exemplos. Encontra tendências nos exemplos e produz regras gerais (hipóteses) a partir dos exemplos e do conhecimento de fundo" (p. 144). Rivera e Becker (2007a) argumentam que a abdução acrescenta uma "inferência criativa" ao processo e que isso permite a criação de novos conceitos, hipóteses e teorias, as quais não podem ser diretamente observadas e, muitas vezes, começam a partir de consequências e da procura de razões. A este respeito, Pimentel e Vale (2012) referem que o raciocínio abdutivo é a porta de entrada no raciocínio indutivo, correspondendo à fase de procura da hipótese preliminar sobre o que têm em comum os dados analisados. Estas autoras reconhecem a importância do raciocínio abdutivo no processo de uma exploração matemática, nomeadamente, na exploração de padrões. Referem ainda que o sucesso deste tipo de raciocínio depende da intuição e do conhecimento prévio. Citando Yu (2006), resumem de forma clara e concisa as ideias principais nos três tipos de raciocínio referidos: "a abdução cria, a indução verifica e a dedução explica" (Pimentel & Vale, 2012, p. 41).

No que concerne à generalização de padrões, Rivera e Becker (2007a) consideram que, tanto a abdução como a indução desempenham um papel relevante na generalização a partir de um conjunto de exemplos particulares e incompletos. Na fase abdutiva, os alunos, muitas vezes, descobrem uma aceitável regularidade R para uma classe, não tendo como base todos os elementos da classe, mas apenas um ou dois casos. Na fase da indução, os alunos testam empiricamente a validade de R, e assim, confirmam a sua validade para muitos mais casos. R é, depois, generalizado numa forma F, que pode ser assumida para toda a classe. A Figura 3.7 esquematiza esse processo.

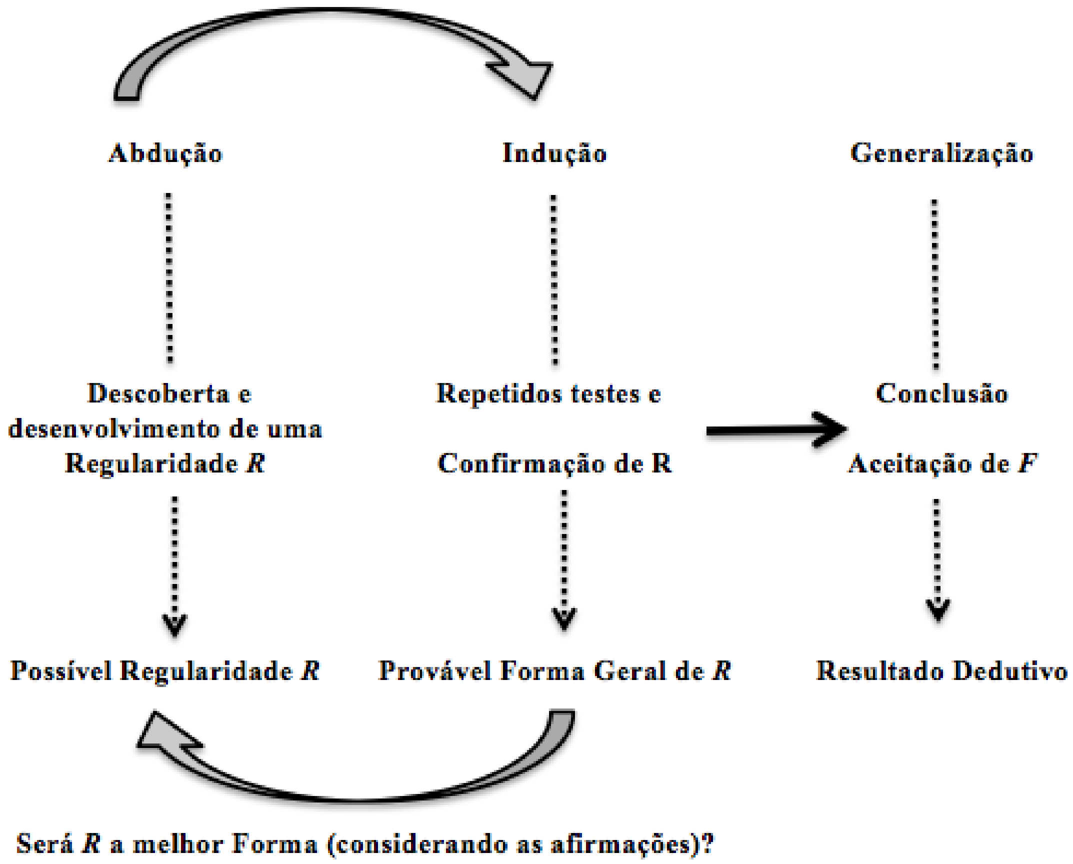


Figura 3.7 – Esquema de generalização de um padrão linear, de acordo com Rivera e Becker (2007a, p. 154).

Tendo em conta a natureza falível da abdução, é importante saber quais as inferências que poderão conduzir a este processo de generalização. Rivera e Becker (2007b) assinalam a importância de ter em atenção os critérios para avaliar a pertinência de uma abdução na generalização de padrões definidos por Pierce (1958, citado em Rivera & Becker, 2007b) e por Psillos (1996, citado em Rivera & Becker, 2007b). O primeiro autor chama a atenção para os seguintes critérios: 1) uma boa abdução deve ser capaz de explicar os factos, seja em relação aos termos conhecidos como aos termos desconhecidos; 2) a generalização não deve surpreender, mas ser expectável, de forma a não falhar em cada caso novo que é levado a verificação; e, 3) a generalização deve suportar a verificação experimental. O segundo autor acrescenta outros elementos importantes: 1) a inferência não deve permitir que uma outra conclusão possa ser retirada quando são introduzidos elementos novos na premissa; 2) a generalização a partir dos exemplos deve ser garantida para o todo; 3) deve suportar conclusões que envolvam outro tipo de vocabulário diferente do usado nas premissas, por exemplo, uma linguagem mais cuidada e; 4) deve acomodar a dimensão eliminatória, ou seja, garantir ser a melhor explicação escolhida das várias possíveis por fornecer a compreensão máxima do padrão.

Comparando o modelo teórico que apresentam com a distinção entre indução naïve e generalização de Radford (2006), Rivera e Becker (2007b) consideram existirem duas questões para clarificar. Primeiro, a distinção de Radford pode ser acolhida pelo raciocínio abdutivo dado que, tanto a indução naïve como a abdução, exibem um raciocínio provável numa procura da generalização a partir de um conhecimento básico. O estabelecimento da regra por indução naïve, mesmo que obtida por "acidente" pode ser usada para evoluir para os três outros elementos que Radford contempla na generalização algébrica: uma comunalidade que é percecionada a partir de um termo para o próximo; uma assunção de que a regra pode ser aplicada para todos os termos e; a presença de uma expressão direta apesar da utilização de métodos como a tentativa e erro. Rivera e Becker (2007b) afirmam mesmo que, em padrões apenas numéricos, a maior parte dos alunos não encontra outra forma de generalizar sem ser através de tentativa e erro. Estes autores referem que seria mais importante responder à questão seguinte sobre os atos de abdução e os atos de indução: "Será o ato que constitui o desenvolvimento e a descoberta de uma comunalidade percetível (abdução) ou será a verificação da comunalidade (indução) que conduz à generalização?" (Rivera & Becker, 2007b, p. 103). Em segundo lugar, estes autores referem que Radford está certo quando afirma que a construção de uma expressão direta depende da capacidade algébrica de um aluno fazer a generalização. Assim, os diferentes níveis de generalização identificados por Radford (2006) dependem da facilidade e fluência dos alunos para representarem com variáveis. No entanto, o que para estes autores Radford não explica é a forma de como aceder à melhor generalização possível e, essa questão referem, está amplamente articulada com a importância de formular uma boa inferência.

3.2 O processo de desenvolvimento da generalização

Ao reconhecerem a importância da generalização em matemática, vários autores identificaram diferentes tipos ou níveis de generalização que permitem inferir sobre o processo de desenvolvimento de níveis mais elementares para níveis mais avançados na identificação e expressão da generalização. Apresentam-se, em seguida, alguns desses estudos.

Dörfler (2008) distingue entre a generalização empírica e a generalização teórica. A generalização empírica é baseada na comparação (percetiva) de um conjunto de exemplos que são classificados de acordo com características e qualidades partilhadas ou comuns. São exemplos deste tipo de generalização a criação de sistemas de classificação que nos permitem, por exemplo, a classificação de objetos em "pássaros" ou "árvores". Embora a generalização empírica tenha em regra uma forte componente construtiva e inventiva (isto é, não determinada pelos exemplos observados ou os dados apresentados), não se coloca numa interação ativa de transformação da situação e falha no objetivo de decidir o que é essencial, sendo limitada para a generalização. A generalização teórica é tanto intencional como extensiva e resulta das relações invariantes ou recorrentes que derivam da ação sobre os objetos. É referida por Dörfler como *um sistema de ação* onde as invariantes essenciais são identificadas e substituídas por protótipos. A generalização é construída a partir da abstração dessas invariantes essenciais. Neste caso, as qualidades abstratas são relações entre objetos mais do que objetos em si mesmos. A generalização empírica necessita de um grande número de casos ou exemplos enquanto que a generalização teórica analisa um caso típico e genérico através da construção de transformações. Os conceitos empíricos são normalmente figurativos e os conceitos teóricos são relacionais. A noção empírica de um círculo, por exemplo, é algo como "ser redondo", a noção teórica é baseada na distância invariante ao centro ou em equivalentes regras de construção.

Nesta linha de pensamento, Mason, Drury e Bills (2007) apresentam a distinção entre generalização a partir dos casos (ou generalização empírica) e a generalização estrutural (ou genérica). A primeira diz respeito à generalização que assume diferentes casos particulares e que formula uma regra geral a partir desses casos. Nesse sentido, os casos particulares podem ser usados para expor e articular a generalidade estrutural. Poucos casos particulares podem revelar dimensões possíveis da variação e vários casos particulares podem ser usados indutivamente ou recursivamente. Já a generalização estrutural ocorre quando um único exemplo é entendido como genérico. Normalmente o primeiro tipo de generalização apresenta-se enquadrado num contexto semântico que tem subjacente o significado das relações, mas que não contacta profundamente com a estrutura matemática, como no caso da generalização genérica.

Harel e Tall (1989) distinguem três tipos de generalização: expansiva, reconstrutiva e disjuntiva. A generalização expansiva ocorre quando se expande a aplicabilidade de um esquema já existente sem o reconstruir. A generalização reconstrutiva ocorre quando se reconstrói um esquema já existente com o objetivo de ampliar o seu campo de aplicabilidade. Por último, a generalização disjuntiva acontece quando, no decurso de movimentação de um contexto familiar para um novo, se constrói um novo esquema, disjunto, para lidar com o novo contexto e se adiciona esse esquema à matriz de esquemas disponíveis. Os autores salientam que a generalização expansiva é uma generalização verdadeira no sentido de que os esquemas anteriores são incluídos diretamente como casos especiais no esquema final. Já a generalização reconstrutiva difere dessa porque o esquema anterior é modificado antes de ser incorporado no esquema geral, mas depois é dada uma verdadeira generalização ao esquema enriquecido. A generalização disjuntiva pode parecer um caso de sucesso da generalização porque permite ao indivíduo fazer face a uma gama mais ampla de exemplos matemáticos, no entanto, deixa de ser uma generalização cognitiva no sentido de que os primeiros exemplos não são vistos como casos especiais de um procedimento geral. Desta forma, de acordo com os autores, a generalização expansiva e a generalização reconstrutiva são de longe mais apropriadas para o desenvolvimento cognitivo e, das duas, a generalização expansiva é mais fácil do ponto de vista cognitivo do que a reconstrutiva. No entanto, embora a generalização expansiva possa ser mais fácil a curto termo, a longo termo há momentos em que a reorganização do conhecimento é essencial, e aqui a generalização reconstrutiva é mais poderosa.

Harel e Tall (1989) defendem que a mais desejável abordagem à generalização deve ser a que promove experiências que permitam a exploração da compreensão com significado da situação corrente, para permitir a passagem para um caso mais geral, que ocorre por generalização expansiva. No entanto, há alturas em que a situação exige uma reconstrução e, nesses casos, é necessário providenciar ao aprendente as condições para que isso aconteça.

García-Luz e Martinón (1998) caracterizaram o processo de generalização dos alunos quando resolvem problemas de padrões lineares em três níveis: *atividade procedimental*, *procedimentos de compreensão* – generalização local e, *compreensão conceptual* – generalização global. No primeiro nível, *atividade procedimental*, os alunos reconhecem o carácter interativo e recursivo do padrão linear e usam-no para responder às primeiras questões, adicionando a diferença constante. Embora não seja uma estratégia de generalização é importante porque é quando se perceciona a diferença constante nos padrões lineares. No segundo nível, *procedimentos de compreensão*, os alunos estabelecem a generalização local conseguindo através de alguma regra calcular determinado termo. No último nível, *compreensão conceptual*, os alunos generalizam uma estratégia. A regra usada inicialmente pode ser aplicada ou transferida para um novo problema reconhecido como similar ao primeiro. No entender dos autores é nesta fase que o estudante adquire uma estratégia.

Stacey (1989) diferencia os problemas de generalização linear em dois tipos: generalização próxima e generalização distante. Na generalização próxima a questão formulada pode ser resolvida passo-a-passo por contagem ou desenho. Na generalização distante a questão não pode ser resolvida a partir de uma abordagem passo-a-passo, o aluno tem de construir e usar uma regra geral.

Radford (2013) apresenta os conceitos de indeterminação, denotação e analiticidade como condições que caracterizam o pensamento algébrico e o diferenciam do pensamento aritmético. A indeterminação refere-se à existência de quantidades não determinadas, como incógnitas, variáveis, parâmetros, etc. A denotação implica que as quantidades indeterminadas sejam nomeadas ou simbolizadas. Essa nomeação pode revestir-se de diferentes formas, usando a linguagem natural, gestos, signos não convencionais ou a notação alfanumérica. A analiticidade permite tratar as quantidades indeterminadas como se fossem conhecidas, ou seja, tornando possível operar (adicionar, subtrair, multiplicar, dividir) essas quantidades como se procede com quantidades numéricas conhecidas.

Centrando-se, especificamente, nos conceitos de indeterminação e analiticidade, Radford (2010) refere que estes podem assumir diferentes formas conduzindo a diferentes níveis de generalidade. Alguns níveis são mais concretos, onde a indeterminação e a analiticidade podem aparecer de uma forma intuitiva, e nos outros níveis mais gerais podem aparecer de forma mais explícita. Tendo em conta a forma como estes dois conceitos surgem, Radford (2010, 2011, 2013) apresenta três níveis distintos de generalização: factual, contextual e simbólica (Quadro 3.1).

Na generalização factual a indeterminação permanece não nomeada. A generalização decorre de ações com números particulares e casos específicos e essas ações consistem em palavras, gestos e atividades percetuais referidas a esses casos particulares. Radford (2011) refere que esta forma intuitiva de lidar com a indeterminação foi estudada por Fujii e Stephens (2008), e denominada como *quase-variável*. Nos níveis contextuais e simbólicos da generalização, a indeterminação é tornada explícita linguisticamente: é nomeada. Enquanto na generalização contextual os objetos gerais são nomeados a partir do envolvimento e da descrição da situação (por exemplo, a *figura seguinte*), na generalização simbólica o objeto geral e as operações que são realizadas com ele podem ser expressas a partir do sistema alfanumérico e semiótico da álgebra .

A generalização factual providencia a matéria prima para que os alunos a transformem nos níveis superiores de generalização. Não se trata apenas de dizer a mesma coisa de forma diferente mas, acima de tudo, de ter acesso a formas mais profundas de consciência. Neste nível de generalização têm particular importância as palavras, os gestos e toda a atividade percetual e a sua relação com os efeitos de objetivação: preparam o espaço para que a designação dos objetos possa ocorrer mais tarde e onde a consciência dos alunos sobre a indeterminação possa atingir um nível mais profundo de objetivação.

Quadro 3.1 – Níveis de generalização propostos por Radford (2006, p. 15).

<table>
<tr><td>Indução naïve</td><td colspan="4">Generalização</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Adivinhação
(Tentativa e erro)</td><td rowspan="2">Aritmética</td><td colspan="3">Algébrica</td></tr>
<tr><td>Factual</td><td>Contextual</td><td>Simbólica</td></tr>
</table>

Radford (2011) apresenta um estudo com alunos de 7-8 anos de idade, onde evidencia as primeiras experiências na exploração de alguns conceitos algébricos envolvendo a generalização de padrões. Para que seja mais clara a distinção entre os níveis de generalização apresentada por Radford (2006) e a sua adequação a alunos deste nível de escolaridade, apresenta-se em seguida, com algum pormenor, evidências desse estudo.

A primeira tarefa proposta aos alunos do 2.º ano de escolaridade apresenta-se na Figura 3.8. Os alunos foram divididos em grupos de dois ou três e foi-lhes pedido que desenhassem as figuras n.º 5 e n.º 6 e, depois, encontrassem uma regra para encontrar o número de quadrados de algumas figuras grandes como a figura n.º 25.

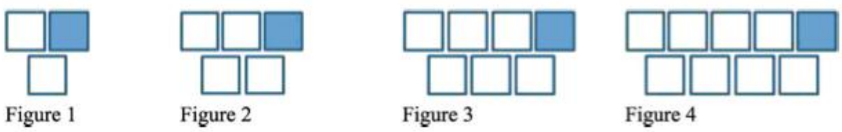


Figura 3.8 – Primeira sequência apresentada aos alunos do 2.º ano no estudo de Radford (2011, p. 305).

Na continuação da sequência, os alunos precisavam reconhecer a comunalidade nas quatro figuras dadas e generalizar isso para outros termos da sequência. A forma como os diferentes alunos apreenderam essa comunalidade não foi idêntica. Por exemplo, num dos grupos, uma das alunas, Erica, referiu que na figura seguinte os quadrados deveriam estar espacialmente distribuídos em duas linhas, mas não conseguiu respeitar nem o número nem a posição do quadrado mais escuro. Contando em voz alta, começou a desenhar os quadrados na primeira linha da esquerda para a direita: “um, dois, três” e quando estava para desenhar o quarto quadrado, voltou à figura n.º 4 da sequência e contou o número de quadrados brancos. Depois continuou a desenhar os quadrados na linha de cima na figura n.º 5, seguindo os que tinha na linha debaixo e colocando o quadrado escuro no fim. A apreensão da comunalidade feita por esta aluna parece ligada a duas estruturas diferentes: a espacial e a numérica. A partir da estrutura espacial emerge um sentido da posição dos quadrados, e da numérica uma estrutura numérica. Parece que Erica primeiro lida com a questão “onde?” e depois “quantos?”. A Figura 3.9 mostra a quinta figura desenhada pela aluna:

Figura 3.9 – Desenho da figura n.º 5, feito por Erica (Radford, 2011, p. 306).

À medida que o grupo se movia para o desenho da figura n.º 6, outros alunos, Carl e Cindy – que, como Erica, contaram em voz alta, mas mantiveram a coordenação das estruturas espacial e numérica para manter coerente a lógica da sequência – intervieram e anteciparam aspetos chave da figura:

> Carl – Nós fizemos seis mais seis, igual a 12, mais um.
> Erica – Sim... Não...
> Cindy – Sim!
> Carl – Sim, foi o que fizemos nos outros. Olha!
> Cindy – Sim, tu adicionaste um.
> Carl – (falando para a Erica) Olha. Quatro mais quatro é igual a oito. Aqui (figura quatro), há oito. (apontando para os sucessivos quadrados da figura quatro na folha da Erica, continuou) 1, 2, 3,4, 5, 6, 6, 8, mais um, que é igual a nove. (p. 306)

A adição de Carl “seis mais seis” transmite a ligação entre as estruturas espacial e numérica. De facto, a expressão “seis mais seis” não é uma mera adição: é a expressão sintética ou global que transmite a ideia de onde os quadrados estão e quantos são. Como suplemento da informação numérica, o primeiro seis refere-se à linha de cima, e o segundo à linha de baixo, e indica que aos seis quadrados um outro quadrado precisa ser adicionado – aquele que é o quadrado escuro. Como a perceção da figura feita pela Erica parece mais sequencial (ela conta os quadrados um depois do outro), ela não entendia o que o seu colega lhe dizia. Por isso Carl ilustrou a ideia, recorrendo a uma das figuras dadas (figura n.º 4). Ele começou a contar os quadrados da linha de baixo (“1, 2, 3, 4.”), depois mudou para a linha de cima e continuou a contar os quadrados brancos, e acabou com a contagem do quadrado negro. Através da sua intervenção, Carl possibilitou que os seus colegas verificassem a comunalidade entre os termos da sequência. Nessa intervenção, embora implicitamente, o aluno aplicou a ideia da comunalidade a outras figuras também.

Em seguida, foi mostrada aos alunos a imagem da Figura 3.10 e questionado se aquela figura faria parte da sequência apresentada anteriormente.

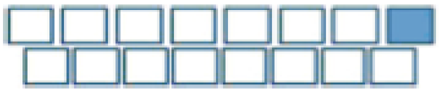


Figura 3.10 – Imagem apresentada aos alunos no estudo de Radford (2011, p. 308).

Os alunos concordaram que esse termo não era a oitava figura da sequência. Cindy apontou para a linha de cima e contou os quadrados brancos, e disse: “Não é porque 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7”, significando que não estavam oito quadrados brancos. Carl concordou: “Sim, porque, olha, aqui (apontando para a linha de cima) estão sete, aqui (apontando para a linha de baixo) estão oito, portanto não está bem”. Embora os alunos tenham identificado a comunalidade e a sua utilização para estender a sequência aos termos vizinhos, assim como a discriminação do que pertence ou não à sequência, Radford (2011) refere que esse procedimento não pode ser considerado como resultado de um processo algébrico.

Apreender o que é realmente comum e caraterístico dos termos de uma sequência ou de um conjunto de objetos é um aspeto central para a formação dos conceitos e desempenha um importante papel na emergência das ideias algébricas dos alunos, mas, de acordo com Radford (2011) não pode ser considerado, em si mesmo, um processo algébrico. A capacidade de reconhecerem a comunalidade, mesmo numa sequência complexa como esta, e a sua extensão a alguns termos consecutivos não significa que estes alunos estejam a pensar algebricamente.

Na continuação da exploração da sequência, foi solicitado aos alunos que considerassem as figuras n.º 12 e n.º 25 e que ponderassem a seguinte situação: “Pierre quer construir uma grande figura da sequência. Explica-lhe o que precisa fazer” (Radford, 2011, p. 309). Referindo-se à figura n.º 12, facilmente Cindy disse: “12 mais 12, mais um”. E referindo-se à figura n.º 25, Erica disse:

> Erica – Cindy! Uh... ok, quanto é 25 mais 25?
> Cindy – (Pensando): Uau...
> Erica – (sorrindo): Depois disso, adicionas um! (p. 309)

Nesta fase, o conhecimento aritmético dos alunos do 2.º ano era ainda limitado e embora eles tivessem alguma sensibilidade para os "números grandes", apenas eram capazes de fazer adições até 25. Mas, não saber como adicionar para além de 25, em vez de ser um impedimento, acabou por ser proveitoso para a atividade dos alunos. Para os ajudar a lidar com grandes figuras, a professora distribuiu calculadoras simples aos alunos. Mas, antes de encontrarem o número de quadrados para a figura n.º 25 ou para outras figuras grandes usando a calculadora, a professora perguntou-lhes como achavam que podiam encontrar o total. Carl sugeriu como número grande a figura n.º 500, mas Cindy referiu a figura n.º 50:

> Carl – E se fizermos 500 mais 500?
> Erica – Não. Faz algo mais simples.
> Carl – 500 mais 500 dá 1000.
> Erica – Mais um, dá 1001.
> Carl – Mais um, dá 1001.
> Cindy – Não, 50 mais 50, mais um igual a 101. (p. 309)

Na resposta sobre a questão 12, Erica e os seus colegas não foram da figura n.º 4 para a figura n.º 12, de forma recursiva. Para lidar com a figura n.º 12 e depois com a n.º 25, os alunos realizaram uma generalização, e de acordo com Radford (2011), "essa generalização foi algébrica na sua natureza" (p. 310).

Embora os alunos não tenham usado notação algébrica, estes lidaram com quantidades indeterminadas concebidas de forma analítica. Por outras palavras, consideraram as quantidades indeterminadas como se as conhecessem e calcularam com elas como fazem com números conhecidos. Radford (2011) considera que a indeterminação esteve presente através de exemplos da variável independente – ou seja, o número da figura. A indeterminação e a analiticidade estão de facto ligadas numa regra que permite aos alunos lidarem com qualquer figura particular, onde os números são tratados não apenas como meros valores numéricos mas como constituintes de algo mais geral. A suspensão do resultado intermédio e final de "12 mais 12 mais um" está bem sintonizada com a ideia algébrica de analiticidade. O que interessa não é o resultado numérico, mas a regra. A regra dos alunos ("12 mais 12, mais um"; "25 mais 25, mais um", etc.) confirma uma mudança no foco que não é mais especificamente numérico. Melhor dizendo, trata-se de pensar sobre os números, mas de uma forma algébrica, ainda que de modo simples. Foi por esse motivo que Erica não desistiu por não saber quanto era $25 + 25$, referindo: "Seja o que for, tens de adicionar um (o quadrado negro)". De facto, a aluna compreende que independentemente do valor numérico da resposta, o importante é adicionar um. Para a emergência da compreensão dos alunos, o que interessa não é o resultado, é a regra. Como não há palavras no vocabulário destes alunos para nomear a indeterminação, ela permanece implícita – algo cuja presença é apenas vagamente advertida por alguns exemplos particulares, expressa de uma forma indexada: os seus exemplos apontam para algo que será um advento, ou seja, que está para vir (Radford, 2011).

Tendo em conta a fase ainda inicial da expressão escrita dos alunos, em seguida, foi-lhes pedido que explicassem as suas soluções e ideias oralmente, usando um gravador áudio para registo. E foi neste contexto de atividades orientadas oralmente que os alunos passaram o resto da semana, trabalhando em sequências semelhantes à apresentada aqui

No último dia da experiência de ensino, a professora apresentou de novo a sequência apresentada na Figura 3.8. Para recapitular, ela convidou os grupos a partilharem com a turma o que tinham aprendido sobre a sequência. E depois pediu para completarem uma nova tarefa. Tirou uma caixa e em frente aos alunos, colocou lá diversos cartões, cada um tendo um número: cinco, 15, 100, 104, etc. Cada um desses números representava o número da figura da sequência. Depois, a professora convidou um aluno a escolher aleatoriamente um cartão e a colocá-lo no envelope, assegurando-se que ninguém veria o número. A professora referiu que o envelope seria enviado a um aluno de outra escola (Tristan) e que os alunos eram convidados a gravarem uma mensagem que pudesse ser colocada no envelope juntamente com o cartão. Na mensagem deveriam dizer ao aluno da outra escola como calcular rapidamente o número de quadrados para a figura indicada no cartão. O excerto seguinte mostra a forma como um grupo de alunos começou esta tarefa:

> Erica – Nós podemos dizer...
> Cindy – Tu fazes...
> Carl –Tu podes fazer...
> Erica – Tu podes fazer o número...
> Cindy – Tu olhas para o número e depois...
> Carl – Nós vamos ter...
> Erica – (continuando o que dizia) O mesmo número...
> Cindy – E depois tu...
> Erica – (continuando o que dizia) Como em cima, depois no lado tu pões outro.
> Cindy – E depois, e depois...
> Carl – E depois no cimo ele terá o mesmo número de quadrados claros, no topo o mesmo número de quadrados claros, e um escuro. (p. 313)

Como este diálogo mostra, o facto de o número da figura não ser específico não impediu os alunos de pensarem e falarem sobre a figura de uma forma matemática. Através da expressão linguística “o número”, os alunos envolveram-se na indeterminação de uma forma explícita. O artigo definido “o” qualifica o nome “número” tornando-o específico, mesmo que desconhecido. Partindo de uma forma intuitiva na atividade prévia, a indeterminação entrou agora no universo do discurso dos alunos. Assim, de acordo com Radford (2011), os alunos atingiram um novo nível de generalidade. Este novo nível mantém-se fortemente ancorado à experiência percetual dos alunos, recorrendo aos gestos e a pistas contextuais para tornarem visível a figura não específica.

No entanto, ao contrário do que fizeram quando lidaram com números grandes particulares, aqui não produziram nenhuma regra. De facto, em vez de algo semelhante à regra "50 mais 50, mais um", os alunos produziram uma descrição espacial para a figura não específica. Como refere Carl "no topo vamos ter o mesmo número de quadrados claros, no topo o mesmo número de quadrados claros e um escuro". Assim, não há nenhuma operação específica com o número desconhecido. Por outras palavras, a analiticidade parece ter desaparecido.

Quando a professora foi ver o trabalho do grupo, Carl explicou a mensagem que estiveram a trabalhar através de um exemplo – figura n.º 50:

> Carl – Fazes 50, mais 50, mais um.
> Prof. – Excelente. Esse seria um bom exemplo. Mas e se Tristan encontrou outro número?
> Carl – 100 mais 100 mais um... (p. 315)

Aqui Carl lida com a generalidade através de exemplos particulares, uma forma de ver o geral através do particular, como Mason (1996) refere. Erica continuou:

> Erica – É o número que ele tem, o mesmo número em baixo, o mesmo em cima, mais um...
> Prof. – Isso é excelente, mas não se esqueçam que ele não tem de desenhar (a figura). Ele apenas tem de adicionar... então, como podemos dizer isso, usando boas ideias?
> Erica – Podemos usar a nossa calculadora para calcular!
> Prof. – Ok. E o que vai ele fazer com a calculadora?
> Erica – Ele põe o número... (faz o gesto como se inserisse o número na calculadora)
> Cindy – Ele vai fazer: o número...
> Erica – Mais o mesmo número, mais um (à medida que fala, faz o gesto de colocar o número outra vez e depois o número um).
> Carl – Yeah!
> Prof. – (repetindo) O número, mais o mesmo número, mais um! Acham que o Tristan será capaz de encontrar o número total dessa forma?
> Cindy e Carl – Sim. (p. 315)

Na primeira intervenção da professora neste episódio, ela faz a subtil distinção entre desenhar e calcular. Uma regra algébrica não inclui termos como "topo" e "baixo". Erica sugere a utilização da calculadora e, juntamente com Cindy, menciona a sequência do cálculo a ser feito para que se encontre o número total. Naturalmente que a utilização da calculadora é meramente virtual. Nas calculadoras dos alunos todos os *inputs* eram números específicos. Mesmo assim, a calculadora ajudou os alunos a objetivarem a dimensão analítica que aparentemente estava perdida no novo nível de generalidade. Através da calculadora, os cálculos foram agora feitos com exemplos não específicos da variável – o desconhecido número da figura.

No final da aula, vários grupos foram convidados a gravar a mensagem para Tristan. Quando o grupo de Erica foi convidado, Carl gravou uma mensagem usando uma figura particular (figura n.º 50). Nesse momento, a professora referiu que a mensagem era baseada num exemplo concreto e perguntou se haveria outra forma de dizer a Tristan o que fazer. Erica gravou a seguinte mensagem:

> Olá Tristan. Põe o número em baixo (faz o gesto apontando para uma linha em baixo imaginária) o mesmo número em cima (aponta para a linha imaginária no topo), mais um. Depois, usa a calculadora (faz gestos de como está a usar as teclas da calculadora), pões o número mais o mesmo número mais um, depois carregas no igual e mostra qual é. (p. 316)

A mensagem foi dividida em duas partes. Na primeira, Erica fala do aspeto da figura. Na segunda parte, Erica indica o cálculo que deve ser feito. Parece que conhecer a figura é um pré-requisito para fazer o cálculo. De facto, a imagem de Erica de colocar os números na calculadora é pela mesma ordem. O significado dos números na regra deriva da configuração espacial da figura.

Um aspeto importante do desenvolvimento do pensamento algébrico consiste em reconhecer os termos da regra com significado abstrato para que o cálculo formal possa ser feito com números desconhecidos. O sentido espacial, situado nos números desconhecidos na regra parece constituir os limites do pensamento algébrico dos alunos do 2.º ano estudados. No entanto, houve um grupo que foi para além desse limite. Quando gravaram a mensagem para Tristan:

> Olá Tristan, ... nós vamos mostrar-te a estratégia para a figura da sequência. Precisas encontrar o número. Se o número que pegares foi 50 ou 40 ou algum, tens de fazer esse número vezes dois e depois adicionar um, e verás a que será igual. (p. 316)

Aqui a adição de um número com ele mesmo transformou-se na multiplicação por dois. O significado espacial do desconhecido foi ultrapassado.

Concluindo esta apresentação detalhada do estudo, é importante salientar que Radford (2011) assinala os dois aspetos que considera relevantes: 1) o facto de na extensão da sequência, os alunos recorrerem à coordenação das estruturas espacial e numérica e que a mesma, apesar de ser complexa, não mobilizou conceitos algébricos; 2) a colocação de questões para figuras mais distantes, como a n.º 25 ou n.º 50, ou seja, figuras para além do campo percetual, permitiu que os alunos fizessem uma generalização algébrica, por tratarem analiticamente as quantidades indeterminadas.

Considerando agora os níveis de generalização algébrica apresentados por Radford (2006, 2010, 2011, 2013), estes alunos conseguiram demonstrar os níveis factual e contextual. O primeiro foi permitido pela abordagem de questões sobre "figuras distantes" e "figuras não específicas", levando os alunos a lidar primeiro com a indeterminação e a analiticidade, que permaneceram ancoradas ao nível das figuras particulares e dos factos aritméticos – nível de generalização algébrica factual. O segundo nível foi suscitado pelo problema de Tristan, onde os alunos puderam lidar com a indeterminação e analiticidade de forma mais explícita, embora ainda profundamente relacionada com indícios espaciais ou outros indícios contextuais – nível de generalização algébrica contextual.

Pode encontrar-se um paralelismo entre o significado da generalização empírica de Dörfler (2008) e a generalização factual de Radford (2010), salientando-se a sua importância para a construção de formas mais sofisticadas de generalização.

Por outro lado, Ellis (2011) considera a dimensão social da generalização, caracterizando-a como um processo dinâmico, socialmente situado, que se desenvolve através de ações colaborativas. Esta perspetiva da generalização atende às interações sociais, às ferramentas, à história pessoal e ao ambiente partilhado por quem se envolve em ações de generalização. Esta autora define a generalização como uma atividade onde as pessoas, dentro de um contexto sociomatemático específico, se envolvem em, pelo menos, uma das três ações seguintes: a) identificam o que é comum entre os casos; b) estendem o raciocínio para além do caso original; c) derivam resultados mais amplos a partir dos casos particulares. Neste sentido, a generalização surge de uma representação coletiva que tem raiz na comunidade, ocorrendo através de experiências mediadas pela interação, linguagem e outras ferramentas próprias. As interações dos alunos suportam e moldam as atividades de generalização, pois são eles que tomam decisões sobre o que tem interesse e o que querem validar. Naturalmente que o papel do professor é também crucial pela promoção de uma cultura de sala de aula que incentive a partilha de generalizações e o encorajamento de justificações e clarificações.

De forma um pouco diferente das categorizações apresentadas anteriormente, Ellis (2007) distingue a atividade dos alunos enquanto generalizam – ações de generalização – das declarações finais de generalização que produzem – reflexos de generalização. As ações de generalização descrevem os atos mentais dos alunos, inferidos a partir das suas atividades e conversas. Correspondem às operações matemáticas que os alunos utilizam na resolução de um problema, ao seu foco matemático, às propriedades e relações que têm em conta ou às estratégias que usam, descrevendo o tipo de ações mentais que ocorrem nas tentativas de generalização. Por outro lado, as declarações públicas dos alunos são consideradas como reflexos de generalização. Se um aluno explicitamente afirma uma propriedade comum, padrão ou relação de similaridade, essa afirmação é entendida como um reflexo de generalização.

Adicionalmente, Ellis (2007) identificou a existência de relações entre as ações de generalização e os reflexos de generalização, revelando que os alunos não se envolviam em ações de generalização isoladas, mas produziam associações com os reflexos de generalização. Assim, e embora, inicialmente, as suas ações de generalização e os reflexos de generalização associados pudessem ser limitados ou até incorretos, subsequentes ciclos permitiam o desenvolvimento de generalizações mais sofisticadas. Desta forma, os alunos envolviam-se em *ciclos interativos de ação-reflexão,* construindo cadeias de generalizações progressivamente mais eficazes. Estes ciclos interativos permitiam que uma generalização inicial pudesse revestir-se de novas formas, passando pela interação e reflexão coletivas, sendo a versão da generalização final não o produto de um só aluno, mas resultante do desenvolvimento feito na interação do grupo.

3.3 A representação da generalização

Dörfler (2008) refere que associado à generalização há sempre uma representação e que não é possível pensar em generalização sem usar uma representação. Desta forma, este autor considera como formas de expressar a generalização tanto um diagrama como uma linha numérica, por exemplo, e ainda a simbologia algébrica. Para além disso, o autor salienta que, para que os alunos tenham sucesso com a generalização, devem ter acesso a diferentes tipos de representações e praticarem a sua utilização para que as mesmas se tornem *transparentes.*

Cooper e Warren (2011), no âmbito do *Early Algebra Thinking Project,* estudaram a introdução do pensamento algébrico com alunos do 3.º ao 5.º ano de escolaridade, centrando-se no processo de generalização e explorando um conjunto variado de situações, nomeadamente os princípios de compensação aritmética, a utilização do modelo de balança para a equivalência e equações, a utilização de balanças de função e os padrões de crescimento. Nesses estudos envolveram um conjunto variado de modelos e representações e atenderam também à capacidade de transição entre eles. Consideram modelos como formas de pensamento sobre conceitos abstratos (por exemplo, a balança para a equivalência) e representações como as várias formas dos modelos (por exemplo, as balanças físicas, os diagramas de balança, a linguagem associada, equações, etc.). Referem ainda que a compreensão matemática está relacionada com a conexão entre modelos e representações. Como resultado dos seus estudos, estes autores destacam um conjunto de hipóteses teóricas sobre a utilização das representações e dos modelos:

– Hipótese teórica 1: O processo da generalização para a abstração ocorre não através de um modelo ou representação, mas entre modelos e representações que seguem uma sequência estrutural. A abstração é generalizada de modelo para modelo e de representação para representação.

– Hipótese teórica 2: Modelos e representações efetivos mostram a estrutura matemática subjacente e facilmente são extensíveis para novos componentes ou novas aplicações. Os autores destacam ainda os seguintes critérios para estabelecer a eficácia de modelos e representações: i) forte isomorfismo entre o desejável modelo mental interno e o modelo externo; ii) ausência de distratores que direcionem a atenção para fora do isomorfismo; e iii) possibilidade de opções entre representações que permitam a extensão do modelo para novos componentes (como variáveis) e para novas aplicações (como encontrar soluções para os problemas). Tanto o modelo da balança como as linhas numéricas têm esses atributos, uma vez que o modelo de linha numérica é forte na representação da operação inversa e o modelo da balança é poderoso para ilustrar a igualdade como equivalência.

– Hipótese teórica 3: Os modelos devem desenvolver-se em quatro formas: 1) aumentar a flexibilidade, seguindo a sequência geral do concreto para o diagrama dinâmico, do diagrama estático para o simbólico (por exemplo, balança física para o desenho da balança, dos números para os símbolos); ii) diminuir na estrutura, seguindo a sequência "estrutura em ação" para "estrutura alusiva à imagem" e para "estrutura imaginada na mente"; iii) aumentar a cobertura, de forma a que as representações posteriores compensem as limitações das anteriores (por exemplo, as balanças desenhadas são mais flexíveis do que os modelos físicos); e iv) relação com a realidade, ligando sempre as formas de representação com exemplos do mundo real.

– Hipótese teórica 4: A sequência deve assegurar que os passos consecutivos estão interiorizados. Caso os modelos e representações anteriores não estejam interiorizados, isso causa dificuldades e conflitos nas versões que sejam introduzidas posteriormente.

– Hipótese teórica 5: Procedimentos complexos podem ser facilmente integrados em mais do que um modelo. Utilizar em conjunto os modelos da balança e da linha numérica para a resolução de equações com uma incógnita, por exemplo.

– Hipótese teórica 6: A abstração é facilitada quando os diferentes modelos e representações partilham o mesmo modelo mental. Por exemplo, a utilização do modelo de balança e da linha numérica para a resolução de equações.

3.4 As representações

De acordo com Goldin (2002), uma representação é uma configuração que pode representar alguma outra coisa de alguma forma. Por exemplo, uma palavra pode representar um objeto da vida real, um numeral pode representar a cardinalidade de um conjunto ou o mesmo numeral pode representar uma posição na linha numérica.

> Uma representação pode ser uma configuração que poderá, por exemplo, agir em lugar de, ser interpretado como, corresponder a, denotar, retratar, encarnar, codificar, evocar, rotular, ligar, significar, produzir, referir-se, assemelhar, servir como metáfora, substituir, sugerir, ou simbolizar o elemento representado. (Goldin, 2002, p. 208)

As representações não ocorrem de modo isolado, pertencendo a sistemas altamente estruturados, sejam pessoais e idiossincráticos, sejam sociais e convencionais. Os sistemas representacionais incluem os sistemas da linguagem falada, símbolos escritos, modelos figurativos e de imagens, modelos manipulativos e situações do mundo real (Goldin, 1998).

As representações podem ser externas ou internas (Goldin & Herscovics, 1991). As representações internas pertencem às possíveis configurações mentais dos indivíduos. Sendo internas, não são diretamente observáveis, e só podem ser inferidas a partir do comportamento exterior. Já as representações externas são observáveis e podem ser palavras, gráficos, imagens, equações... Embora sejam observáveis, a sua interpretação é subjetiva e depende das representações internas de quem faz a interpretação (Goldin & Kaput, 1996).

Goldin e Kaput (1996) referem que as interações entre as representações internas e externas são de especial importância. Por vezes, a pessoa externaliza fisicamente atos decorrentes de estruturas internas – como o ato de escrever, falar, manipular elementos de um qualquer sistema externo concreto, etc. Outras vezes, a pessoa internaliza através de meios de interação com as estruturas físicas externas de um sistema notacional, através da leitura, interpretação de palavras e frases, interpretação de gráficos e equações, etc. Esses atos interpretativos podem acontecer tanto a um nível de consciência ativo, controlado e deliberado, como de uma forma mais passiva, num nível automático, onde as estruturas físicas atuam no indivíduo como se ressoassem com estruturas mentais construídas previamente. As interações em ambas as direções (entre as representações internas e externas) podem (e, muitas vezes, isso ocorre) acontecer em simultâneo.

Bruner (1966), que associa a representação a uma tradução da experiência num modelo de mundo, distingue entre representações ativas, icónicas e simbólicas. As primeiras dizem respeito às ações, as segundas às imagens ou gráficos e, as terceiras são extraídas de um sistema simbólico regido por regras ou leis, como a linguagem. Como explica:

> A primeira é através da ação. Nós conhecemos muitas coisas para as quais não temos nem imaginário nem palavras, e elas são muito difíceis de ensinar a alguém através da utilização de outras palavras ou diagramas ou imagens (...) Há um segundo sistema de representação que depende da organização visual ou de outra organização sensorial e da utilização de imagens sumárias (...) Temos estado a falar da primeira forma de representação como ativa, a segunda como icónica (...) Finalmente há a representação em palavras ou linguagem. A sua marca principal é que é simbólica por natureza, com determinadas características dos sistemas simbólicos. (p. 10-11)

Considerando as representações como recursos que os alunos usam para resolver problemas, Smith (2008) refere que estas "re-apresentam" as ideias do problema de uma forma que permita a sua solução. Este autor refere que as representações idiossincráticas podem: a) fielmente reproduzir a ação do contexto do problema; b) despojar-se do contexto, atendendo apenas aos aspetos numéricos do problema; ou c) combinar as duas abordagens.

Admitindo que as representações idiossincráticas são tanto inevitáveis, como necessárias na aprendizagem da matemática, Smith (2008) alerta para o facto de os alunos precisarem de ter oportunidade de relacionar as suas próprias representações com as que são próprias da matemática. Para tal, a resolução de problemas a pares ou em pequenos grupos, a partilha de resoluções em momentos coletivos permite que as diferentes representações também sejam partilhadas e questionadas pelos pares (e pelo professor), resultando numa proliferação de representações, entre as criadas idiossincraticamente e as convencionais.

Assim, em vez de usar unicamente as representações abstratas e gerais da matemática – representações capazes de resolverem uma classe inteira de problemas – os alunos podem criar representações *ad hoc*. Essas representações podem facilitar a solução do problema, mas nem sempre envolver os alunos em raciocínio matemático. Afinal, resolver um problema particular pode não ser o objetivo em si mesmo, mas usar as situações dos problemas como porta de entrada para a abstração e para a generalização – desenvolver a capacidade de matematizar situações. Fazer isso envolve sair do contexto e examinar a matemática subjacente ao contexto. Também requer olhar para além do contexto do problema e dos métodos de resolução para encontrar comunalidade e diferenças. Desta forma, os alunos devem progredir a partir de representações idiossincráticas e *ad hoc* de problemas particulares para representações convencionais, abstratas e gerais que funcionem numa classe de problemas. O papel do professor inclui apoiar os alunos a construírem pontes entre as suas representações idiossincráticas e as convencionais, ajudando-os a verem a similaridade (da perspetiva matemática) entre variados contextos de problemas (Smith, 2008).

No mesmo sentido, o NCTM (2000) refere a importância de encorajar os alunos a representarem as suas ideias sob formas que, para eles, façam sentido, mesmo que as suas primeiras representações não sejam as convencionais. Mas indica que é igualmente importante que os alunos aprendam formas de representação convencionais, de modo a facilitar quer a sua aprendizagem da matemática, quer a comunicação das suas ideias matemáticas, com terceiros.

> As representações idiossincráticas construídas pelos alunos, à medida que resolvem problemas e investigam ideias matemáticas, podem desempenhar um papel bastante importante ajudando os alunos na compreensão e na resolução de problemas, e proporcionando formas significativas para registar um método de resolução e para o descrever a outros. Ao observar as suas representações, os professores poderão conseguir compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos. Sempre que adequado, poderão ainda estabelecer ligações entre as representações pessoais dos alunos e representações mais convencionais. É importante que os alunos tenham oportunidades para aprender formas de representação convencionais, quer para criar, aperfeiçoar e utilizar as suas próprias representações, enquanto ferramentas que suportam a aprendizagem e a produção de matemática. (NCTM, 2000, p. 76)

3.5 A simbolização

De acordo com Kaput (2008) o pensamento algébrico "é composto por processos complexos de simbolização que servem o propósito da generalização e do raciocínio com generalizações" (p. 9). Desta forma, Kaput et al. (2008) consideram a generalização e a simbolização como processos estritamente relacionados, referindo que a simbolização ao serviço da generalização permite uma expressão unificadora, ou seja, uma forma de unificar a multiplicidade. Consideram o processo de simbolização como dinâmico e aditivo que é construído a partir do momento em que os alunos são confrontados com uma situação de sala de aula que procuram descrever usando palavras, desenhos ou outras representações. Esta construção é coletiva porque é mediada pelas intervenções dos alunos, quando inseridos em salas de aulas onde as discussões matemáticas são "nutridas e apoiadas" (p. 28), e vive de aditivas redefinições desenvolvendo uma cadeia de significação (Cobb et al., 1997) que é orquestrada pela ação do professor.

Kaput et al. (2008) referem-se à simbolização como uma necessidade sentida pelos alunos no decurso do processo de generalização, apoiando-se na perspetiva de Mason (2008) de que este é um poder que os alunos já possuem para compreenderem o mundo que os rodeia. No entanto, e de acordo com este último autor, este poder necessita ser exercitado, desenvolvido e também revelado para que seja usado intencionalmente. Kaput et al. (2008) realçam também que a álgebra não pode ser entendida como uma simples manipulação simbólica, como uma *aritmética com letras*, mas antes como uma linguagem poderosa, sucinta e manipulável que expressa generalizações.

Como foi referido, estes autores consideram que o processo de simbolização tem uma natureza construtiva e aditiva, em oposição à perspetival que o considera abstrato e subtrativo. A visão abstrata e subtrativa resulta de uma confusão com o produto visível que é, muitas vezes e idealmente, uma descrição da situação esquemática e simplificada, ao invés do processo construtivo e criativo através do qual o produto da simbolização é construído. A Figura 3.11 representa a forma como estes autores conceptualizam o processo de simbolização.

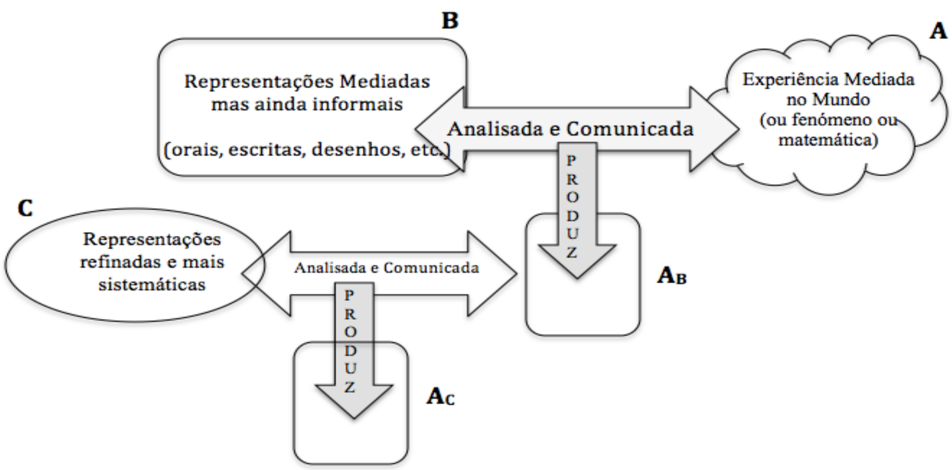


Figura 3.11 – Processo de simbolização (Kaput et al., 2008, p. 30).

Numa situação de sala de aula A, os alunos envolvem-se na exploração, descrição e discussão matemáticas. As descrições orais, escritas e representadas por desenhos, por exemplo, são partilhadas no grupo e constituem descrições ainda informais, B. Este é considerado o primeiro passo no processo de simbolização. Os autores salientam que mesmo a linguagem natural é já um recurso de simbolização, pois, como refere Mason (2008), é já um veículo bem desenvolvido para expressar a generalidade. A simbolização B é formada e testada em confronto com as observações sobre A, ou seja, no contexto social da interação de sala de aula. Então, B permite que os alunos criem uma nova conceptualização de A, começando a pensar em A de forma diferente, formando A_B, pois A_B depende de B. Continuando neste processo dinâmico, pode surgir uma refinada conceptualização de A, chamada de A_C, criando-se uma cadeia de significação (Cobb et al, 1997). O processo continua e, possivelmente, uma simbolização convencional D é vinculada, introduzindo uma nova conceptualização A_D. Esta representação do processo dinâmico de simbolização revela a sua natureza aditiva e construtiva, onde cada nova fase envolve as anteriores, permitindo a sua evolução para formas mais sofisticadas.

Naturalmente, reconhecem Kaput et al. (2008), na realidade de uma sala de aula, com variados participantes ativos, ocorrem, em simultâneo, múltiplas conceptualizações do mesmo fenómeno ou situação. Aqui o papel do professor é crucial no sentido de orquestrar a direção da atenção para que a mesma "convirja, ou melhor, emirja" (p. 32). Muitas vezes, a variedade de desempenhos dos alunos pode ser um recurso para a progressão para níveis mais sofisticados de simbolização, onde alunos mais avançados podem providenciar os meios para que outros alunos possam entender a situação de forma mais produtiva e apropriar-se do processo de simbolização. O papel do professor é, portanto, essencial para "orquestrar o processo de simbolização" (Kaput et al., 2008, p. 32), encarado do ponto de vista social.

De acordo com Kuchemann (1978) as dificuldades que os alunos enfrentam quando são introduzidos à linguagem simbólica podem dever-se aos diferentes significados que as letras podem assumir e ser interpretadas. Usando como referência a teoria dos estádios de desenvolvimento de Piaget, Kuchemann diferencia o significado que os alunos atribuem às letras enquanto notação simbólica em diferentes níveis. Entre eles destacam-se os significados de letra como incógnita, letra como número generalizado e letra como variável. O primeiro diz respeito ao conceito de incógnita, representando um número específico, mas desconhecido. Quando a letra é entendida como um número generalizado isso significa que pode tomar ou representar um conjunto de valores, e não apenas um (ou um conjunto limitado) como no caso da(s) incógnita(s). Por sua vez, interpretar as letras como variáveis envolve a capacidade de reconhecer que a letra representa um conjunto de valores e que pode ser usado para descrever relações entre conjuntos.

Britt e Irwin (2011) sugerem que, antes da introdução da simbologia algébrica, os alunos devem trabalhar em diferentes níveis de perceção da generalização, que envolvam a expressão da generalização por palavras, imagens e gráficos, assim como símbolos numéricos que atuem como quase-variáveis (Fujii, 2003). A expressão quase-variável significa "um número ou conjunto de números numa expressão que revelam a relação matemática subjacente e que se manterá verdadeira independentemente dos números que sejam usados" (Fujii, 2003, p. 59). Por exemplo, expressões como $78 + 49 - 49 = 78$ podem ser usadas para que os alunos percecionem a relação geral do tipo $a + b - b = a$. Este tipo de pensamento é descrito como *pensamento quase-variável* e apresenta-se, segundo Fujii e Stephens (2008), como uma ponte para a compreensão da noção de variável.

Britt e Irwin (2011) sugerem, então, uma trajetória que providencie oportunidades para que todos os alunos trabalhem em diferentes níveis de perceção da generalidade. Tal trajetória pode, primeiramente, envolver alunos muito novos em atividades com proto-quantidades, onde a contagem não seja necessária e onde possam descrever generalizações através das suas próprias palavras. A atenção pode depois ser direcionada para o desenvolvimento de estratégias de contagem. O conhecimento associado da contagem ajuda a elaborar e ampliar um conjunto de estratégias de cálculo aritmético que envolve a generalidade e que pode ser expressa com a utilização de quase-variáveis. Finalmente, os alunos que tenham trabalhado com sucesso com as quase-variáveis, podem ser desafiados a usar os símbolos da álgebra para representar e trabalhar com a generalização matemática desenhada a partir de um conjunto de situações numéricas e de medida, assim como com representações figurativas. Desta forma, os alunos trabalham com três sistemas semióticos para expressarem diferentes níveis de generalização: primeiro com números como quase-variáveis, depois com palavras e finalmente com símbolos literais da álgebra .

Blanton et al. (2011) referem que a álgebra está enraizada na linguagem matemática que combina operações, variáveis e números para expressar a estrutura e relações matemáticas de forma sucinta. Assim, compreender a notação simbólica algébrica, especialmente a utilização de variáveis, é central para a aprendizagem da álgebra. A compreensão do significado da variável pode começar tão cedo como no 1.º ano de escolaridade, ou mesmo no pré-escolar, com experiências variadas e ricas onde os alunos possam trabalhar com números e operações e desenvolver uma compreensão relacional da igualdade ou na exploração de relações funcionais. Interpretar o significado de variáveis e, progressivamente, produzir expressões com variáveis, é um processo que se desenvolve ao longo do tempo, e que deve começar cedo na escolaridade (Blanton et al, 2011).

Russell et al. (2011) defendem que a introdução da notação algébrica no momento em que os alunos já tenham articulado as suas ideias em palavras e imagens, permite-lhes aceder ao significado dos símbolos. Os autores referem que essa nova forma de representação não só providencia uma expressão concisa das ideias dos alunos como oferece novas formas de percecionar as relações matemáticas. Também Brizuela, Carraher e Schliemann (2000) consideram que a notação simbólica pode ser "uma ferramenta para pensar e refletir" (p. 5), ferramenta essa que é usada no processo de resolução de um problema, por exemplo, mas, também pode servir para pensar e refletir sobre as relações entre as quantidades desse problema. Assim, a notação simbólica serve não só para representar a compreensão e o pensamento sobre uma relação algébrica ou como percursor para uma representação convencional algébrica, mas também para aprofundar e avançar nessa compreensão e pensamento.

Arcavi (1994, 2005) introduz a noção de sentido de símbolo, em analogia com a noção de sentido de número da aritmética, caracterizando-a como um complexo e multifacetado sentir sobre os símbolos e que se traduz na capacidade para interpretar e usar, de forma criativa, a simbologia matemática na descrição de situações e na resolução de problemas, reconhecendo o seu poder e adequação, manipulando-a flexivelmente e dando-lhe sentido em diferentes contextos. Para este autor deve procurar-se desenvolver o sentido de símbolo em contextos ricos que aportem significado à atividade que os alunos realizam sobre os símbolos, de modo que estes não sejam encarados como entidades formais e sem sentido, mas como poderosas formas de compreender e resolver problemas e de comunicar.

Apresentam-se, em seguida, dois estudos (Carraher et al., 2001; Radford, 2012) que mostram formas diferentes de introdução da notação simbólica em alunos da escola elementar. O primeiro refere-se à exploração de um problema com quantidades desconhecidas, envolvendo a noção de incógnita; e o segundo apresenta uma sequência pictórica crescente, envolvendo a noção de variável. Em ambos os estudos, os alunos foram iniciados à representação com notação simbólica, apesar de frequentarem os anos iniciais.

O estudo de Carraher et al. (2001) foi realizado com alunos de nove anos de idade que utilizaram a notação algébrica para representar um problema envolvendo quantidades desconhecidas em relações aditivas. O problema apresentado aos alunos tinha o seguinte enunciado:

> Mary e John têm, cada um, um mealheiro.
> No domingo, os dois tinham a mesma quantia nos seus mealheiros.
> Na segunda-feira, a avó visitou-os e deu a cada um três dólares.
> Na terça-feira, eles foram juntos a uma livraria. Mary gastou $3 no livro novo do Harry Potter. John gastou $5 num calendário de 2001 com a imagem de um cão.
> Na quarta-feira, John lavou o carro do vizinho e ganhou $4. Mary também ganhou $4 a fazer *babysitting*. Cada um deles colocou esse dinheiro no mealheiro.
> Na quinta-feira, Mary abriu o seu mealheiro e viu que tinha $9. (p. 132)

A primeira apresentação do problema apenas continha a informação sobre a situação de domingo. Para ajudar na interpretação do problema, os autores apresentaram uma linha numérica contendo a representação do valor desconhecido "n" (Figura 3.12).

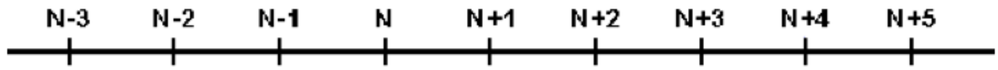


Figura 3.12 – Linha numérica com *n*, (Carraher et al., 2001, p. 132).

Depois de lerem a parte relativa ao que acontecia no domingo, a investigadora perguntou aos alunos se sabiam quanto seria a quantia que cada uma das personagens da história tinha. Os alunos responderam em coro que não e um dos alunos acrescentou "N, é qualquer quantia", outros também disseram "qualquer número" ou "qualquer". Para representarem a quantia de dinheiro que cada personagem da história tinha, os alunos usaram a linha numérica com a representação da letra N.

Quando foi apresentada a situação relativa a segunda-feira, os alunos perceberam que cada criança da história continuaria a ter a mesma quantia de dinheiro. Um dos alunos representou a quantia de segunda-feira do seguinte modo: "$?+3$". Quando a investigadora questionou os alunos sobre a possibilidade da utilização do ponto de interrogação, vários alunos disseram que seria outra forma de escrever N. Outros alunos representaram como "$N+3$". Para a quantia de domingo usaram "$N+2$" e para a de segunda-feira "$N+5$".

Na apresentação da situação relativa a terça-feira, alguns alunos demonstraram dificuldades que se prendiam com o facto de as personagens da história começarem a gastar dinheiro e os alunos questionaram se teriam dinheiro suficiente para esses gastos. A maior parte dos alunos assumiu que as crianças da história deveriam ter, pelo menos, $5 nos seus mealheiros até ao fim de segunda-feira, pois de outra forma, John não teria dinheiro suficiente para a sua compra. Recordando que no domingo ambas as crianças tinham a mesma quantidade, a investigadora questionou sobre se isso se mantinha na terça-feira. Os alunos referiram, com facilidade, que as crianças teriam diferentes quantias de dinheiro porque John tinha gasto mais dinheiro, ficando Mary com mais dinheiro.

Uma das alunas referiu que, na terça-feira, Mary acabou por ter a mesma quantia que tinha no domingo, porque tinha gasto três dólares. Usando a linha numérica do N, a investigadora conduziu os alunos a explorarem as transações do John, desenhando setas do N para o $N+3$ e depois para $N+2$. Alguns alunos referiram que essas transações resultariam em "N menos dois", levando à escrita da expressão "$N+3-2=N-2$".

Quando exploraram a situação relativa a quarta-feira, a investigadora perguntou se as crianças da história teriam a mesma quantia de dinheiro que tinham na segunda-feira. Uma das alunas referiu que Mary teria $N+4$ e que John teria $N+2$. Vários alunos concordaram e explicaram porquê. Na exploração da situação de quinta-feira, os alunos, facilmente, perceberam que N teria de ser cinco.

Carraher et al. (2001) concluem que a linha numérica ajudou os alunos a lidarem com quantidades desconhecidas e a relacioná-las e que é possível que alunos desta idade representem quantidades desconhecidas e operarem com representações envolvendo letras e números. De facto, para concluírem que "$N+3-5+4$" era igual a $N+2$ e serem capazes de explicar que $N+2$ teria de ser igual a mais dois do que o valor com que John começou, *qualquer que fosse o valor*, é um facto significativo que revela a compreensão dos alunos desse procedimento.

Outra forma de introdução da notação algébrica é-nos apresentada por Radford (2012), num estudo com uma turma de 4.º ano, envolvendo a exploração de uma sequência que já tinha sido trabalhada pela turma no seu 2.º ano de escolaridade (como foi referido anteriormente, neste capítulo).

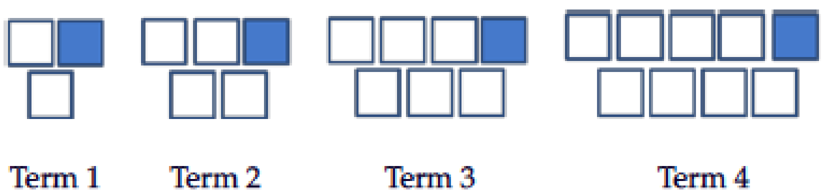


Figura 3.13 – Primeira sequência trabalhada no 4.º ano no estudo de Radford (2012, p. 679).

Quando foi pedido aos alunos para escreverem uma mensagem escrita com a regra que permitisse calcular qualquer termo da sequência, vários expressaram facilmente: "Calculas duas vezes o número do termo e adicionas um.” e “Duas vezes o número mais um.”. Em seguida, e pela primeira vez, a professora pediu aos alunos para adicionarem à mensagem escrita uma “regra matemática”. Depois de uma discussão no grupo sobre a diferença entre uma frase e uma regra matemática, os alunos concordaram que uma regra deveria incluir apenas operações. Um dos alunos, Carlos, escreveu a regra que se apresenta na Figura 3.14.

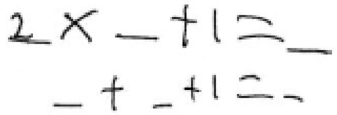


Figura 3.14 – Resposta de Carlos (Radford, 2012, p. 687).

A introdução à notação simbólica ocorreu, posteriormente, quando os alunos discutiram outra sequência (Figura 3.15).

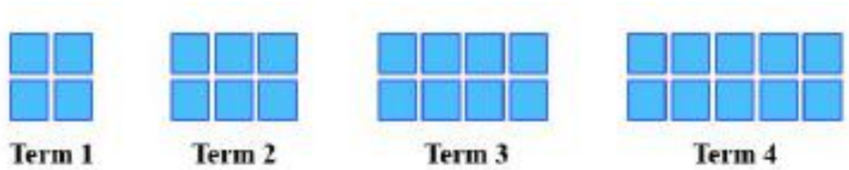


Figura 3.15 – Sequência explorada no trabalho de casa (Radford, 2012, p. 687).

A professora pediu aos alunos que produzissem uma regra matemática e vários grupos apresentaram as suas resoluções. Por exemplo, uma aluna, Erica, sugeriu a regra seguinte: “$1 + 1 + 2 \times \_ = \_$”. Quando a professora perguntou o que poderia ser escrito sem utilizar o traço (_), um aluno sugeriu a utilização do ponto de interrogação e uma aluna a utilização de uma letra. Esta discussão conduziu um aluno, Carlos, ao reconhecimento de que o mesmo símbolo não poderia representar valores numéricos diferentes.

> Samantha – Uma letra?
> Prof. – Ah! Poderia escrever um mais um mais duas vezes n? O que significaria o n?
> Um aluno – Um número...
> Prof. – Poderíamos escrever que “$1 + 1 + 2 \times n$ igual a n? (alguns alunos responderam que sim, outros que não). Ok. Escreve isso, escreve a tua regra (Erica escreve $1 + 1 + 2 \times n = n$).
> Carlos – Não, porque n (referindo-se ao primeiro) não é igual a n (referindo-se ao segundo).
> Prof. – Ah! Porque dizes que o n não é igual a n?
> Carlos – Porque se fazes duas vezes n, isso não é igual a n. (p. 688)

Radford (2012) reafirma que o pensamento algébrico não pode ser reduzido à utilização da notação simbólica, embora reconheça que esta constitui um sistema semiótico poderoso. No entanto, o autor reconhece também que as evidências demonstradas neste estudo revelaram que, de facto, alunos destas idades, podem começar a pensar algebricamente e a utilizar a notação simbólica. Destaca, para isso, a intencionalidade com que foi desenhado o processo de ensino, com questões particulares e com uma sequência também intencional (por exemplo, estender a sequência, lidar com "termos grandes", o problema da mensagem, a questão da notação...).

Os dois estudos apresentados têm em comum a preocupação com a atribuição de significado à simbolização introduzida. De facto, como diversas investigações demonstram (e.g. Kieran, 2004; Kuchemann, 1978), muitas vezes, os alunos sentem dificuldades na transição entre a aritmética e álgebra, e muitas dessas dificuldades estão relacionadas com a utilização da simbologia algébrica. No entanto, é importante destacar que a maior parte dessas investigações retrata contextos em que a generalização matemática não é trabalhada na escola elementar, só se iniciando mais tarde, no contexto da álgebra (Britt & Irwin, 2011).

3.6 Síntese

A generalização enquanto processo do raciocínio matemático, é entendida pelos diferentes autores (e.g. Lannin et al. 2011; Mata-Pereira & Ponte, 2013) como parte integrante de um processo que inclui a formulação de conjeturas, o teste ou investigação do porquê dessas conjeturas e a justificação das mesmas.

A generalização, como elemento central do pensamento algébrico, envolve a extensão do raciocínio para além do caso ou casos considerados inicialmente. Isso envolve reconhecer a comunalidade (Kaput, 1999; Malara, 2012; Mason, 1996; Radford, 2008, 2010), mas também a particularidade (Mason, 1996), conduzindo a experiências como *ver a generalidade a partir do particular* e *ver o particular no geral* (Mason, 1996).

Com particular relevância para o pensamento algébrico, a distinção entre generalização aritmética e generalização algébrica de Radford (2008, 2010) conduz-nos à importância de atender à forma como a comunalidade entre casos é apreendida. Não interessa apenas perceber a comunalidade para que a generalização produzida seja algébrica, é necessário que o processo de apreensão dessa comunalidade seja também algébrico. Ou seja, é necessário que se revista de formas de pensamento consideradas algébricas, conduzindo a uma regra geral, que não é necessariamente expressa pela notação simbólica. Neste aspeto, Radford (2008) e Rivera e Becker (2007a) parecem discordar relativamente ao papel da abdução no processo de generalização algébrica. Enquanto o primeiro autor considera que essa forma de raciocínio não conduz a uma generalização algébrica, os segundos autores mostram como tal pode ocorrer, relevando o papel da abdução e da indução no processo de generalização. Neste estudo, considera-se que as primeiras conjeturas que os alunos podem fazer a partir da abdução podem conduzir a generalizações algébricas, identificando-se, assim, com a perspetiva de Rivera e Becker (2007a). No entanto, também se considera que, só nos casos em que essas conjeturas são testadas na sua validade, é que podemos ter uma generalização algébrica, e isso acontece quando a abdução resulta de alguma apreensão da comunalidade (Radford, 2008).

A existência de diferentes níveis de generalização, uns mais profundos do que outros (Radford, 2008, 2010), assume particular relevância neste estudo. Desta forma, considera-se a importância dos conceitos de indeterminação e analiticidade (Radford, 2011). A forma como a indeterminação e a analiticidade é usada no processo de generalização determina o nível de generalidade em que a mesma ocorre. Assim, a indeterminação pode surgir não nomeada (a partir da utilização de quase-variáveis (Fujii, 2003), por exemplo) e isso corresponde a um nível de generalização menos avançado do que quando essa indeterminação é tornada explícita (com a identificação das variáveis em jogo na situação). No que concerne à analiticidade, ela diz respeito à forma como analiticamente são tratadas as quantidades indeterminadas. Por exemplo, se os alunos conseguem lidar com quantidades indeterminadas como se as conhecessem, estão a fazê-lo de forma analítica, ou seja, estão a fazer a passagem do foco aritmético para o algébrico. A indeterminação e a analiticidade são, de facto, essenciais para que o aluno consiga formular uma regra geral (Radford, 2011).

Neste estudo assume ainda particular relevo a conceção de generalização enquanto processo dinâmico, socialmente situado e que se desenvolve através de ações colaborativas (Ellis, 2011). Para além disso, salienta-se a importância dos ciclos interativos de ação-reflexão, particularmente quando ocorrem em ambientes coletivos, onde a generalização final pode ser produto de um grupo de alunos.

Relativamente às representações, considera-se a importância das representações ativas, icónicas e simbólicas (Bruner, 1966) e a sua relação com a generalização. Essa relação não se traduz apenas na expressão da generalização, mas também na compreensão das relações matemáticas que pode conduzir à generalização. Assim, a importância das representações é entendida durante o processo de generalização (nas ações de generalização, segundo Ellis, 2007) e no resultado final dessa generalização (nos reflexos de generalização, segundo Ellis, 2007). Realça-se ainda a importância das representações idiossincráticas (NCTM, 2000; Smith, 2008) e da utilização da variedade de representações e conexões entre elas (Cooper & Warrren, 2011).

No que concerne à simbolização, assume-se que a mesma serve propósitos de generalização (Kaput, 2008; Kaput et al., 2008) e releva-se o seu papel enquanto "ferramenta para pensar e refletir" (Brizuela et al., 2000). Assim, considera-se que a introdução da notação simbólica algébrica com o propósito de expressar a generalização, pode oferecer novas formas de percecionar as relações matemáticas (Brizuela et al., 2000; Russell et al., 2011).

Considera-se ainda importante que os alunos trabalhem diferentes níveis de generalização que envolvam a expressão da generalização por palavras, imagens e gráficos, assim como símbolos numéricos que atuem como quase-variáveis. Desta forma, acentua-se a importância da trajetória identificada por Britt e Irwin (2011), onde os alunos trabalham diferentes sistemas semióticos para expressarem diferentes níveis de generalização.

Capítulo 4 - Contextos de promoção do pensamento algébrico

Tendo em conta a definição de pensamento algébrico assumida neste estudo, e entendendo a generalização como processo central, Blanton (2008) considera as duas vertentes seguintes como *portas de entrada* para o seu desenvolvimento: a aritmética generalizada e o pensamento funcional. Carpenter et al. (2003) sintetizam as ideias sobre a aritmética generalizada naquilo que consideram ser o *Pensamento Relacional*. Neste estudo considera-se que a aritmética é um contexto amplo que pode promover aspetos do desenvolvimento tanto do pensamento relacional como do pensamento funcional, optando-se por usar a terminologia proposta por Carpenter et al. (2003), ao invés da noção de aritmética generalizada.

Desta forma, assumem-se como contextos para a promoção da capacidade de generalização e, consequentemente, do pensamento algébrico, a exploração de tarefas que tenham como objetivos o desenvolvimento do pensamento relacional e do pensamento funcional. Na primeira parte deste capítulo, depois da definição do conceito de pensamento relacional, destaco como aspetos centrais a conceção relacional do sinal de igual e a construção da generalização a partir de relações numéricas e das propriedades das operações. Na segunda parte deste capítulo, relativa ao pensamento funcional, discuto o conceito, apresento um possível percurso de desenvolvimento do pensamento recursivo ao pensamento funcional e possíveis cenários (não divergentes) para a promoção do pensamento funcional: exploração de problemas contextualizados e de sequências.

Numa síntese final apresento os aspetos discutidos neste capítulo com maior relevância para o presente estudo.

4.1 O pensamento relacional

4.1.1 Aspetos gerais

Carpenter et al. (2003) consideram que, sendo a aritmética o tema com maior foco no currículo da escola elementar, é necessário reconsiderar como é ensinada e aprendida. Referem que a separação artificial entre álgebra e aritmética impede que os alunos construam formas poderosas de pensamento sobre a matemática nos primeiros anos e torna mais difícil a aprendizagem da álgebra nos anos mais avançados. Na sua perspetiva, para o tipo de pensamento matemático que permita construir as bases da álgebra é necessário um longo período de tempo, começando nos primeiros anos de escolaridade. O importante será desenvolver formas de pensamento sobre a aritmética que sejam consistentes com as formas de pensamento necessárias para aprender álgebra com sucesso (Carpenter & Levi, 2000).

Também na perspetiva de Carraher et al. (2006), se ficarmos apenas na natureza concreta da aritmética corremos o risco de oferecer aos alunos uma visão superficial da matemática e desencorajar a generalização. Embora a fluência de cálculo seja crucial para permitir aos alunos raciocinar algebricamente, isso não assegura que estes estejam atentos às regularidades e relações aritméticas e que consigam generalizá-las.

Carpenter et al. (2003) consideram que é necessário tornar as propriedades dos números e das operações como foco de ensino, de modo que: i) todos os alunos tenham acesso às propriedades matemáticas básicas; ii) os alunos percebam porque o procedimento de cálculo que usam funciona; iii) os alunos apliquem os seus procedimentos com flexibilidade numa variedade de contextos; e, iv) os alunos reconheçam as relações entre álgebra e aritmética e que possam usar essa compreensão da aritmética na compreensão das bases da álgebra.

Também Blanton e Kaput (2005) sugerem exemplos de aspetos que podem ser usados para trabalhar a aritmética generalizada: i) *explorar propriedades e relações dos números inteiros*, (por exemplo: generalizar sobre somas e produtos de números pares e ímpares; generalizar sobre propriedades como a subtração de um número por ele próprio; decompor números inteiros em possíveis adições e examinar essas adições; generalizar sobre as propriedades do valor de posição); ii) *explorar propriedades das operações com números inteiros*, (por exemplo: explorar relações entre as operações como a comutatividade da adição e da multiplicação e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição); iii) *explorar a igualdade como a expressão de uma relação entre quantidades*, (por exemplo: explorar a igualdade como uma relação entre quantidades usando a balança; tratar equações como objetos que expressam relações quantitativas, como $(3 \times n) + 2 = 14$); iv) *tratar o número algebricamente*, (por exemplo: atender à estrutura do número e tratá-lo como um todo, por exemplo como saber que a soma de $45678 + 85631$ é par ou ímpar?); e, v) *resolver expressões numéricas com números desconhecidos em falta, usando o sentido de incógnita*, (por exemplo: resolver equações como “se $V + V = 4$, então quanto é $V + V + 6$?, resolver equações com a reta numérica, completar puzzles numéricos onde faltem números).

Carpenter et al. (2003) sintetizam estas ideias sobre a aritmética generalizada naquilo que designam por *Pensamento Relacional* e que consideram dizer respeito à capacidade de *olhar* para expressões ou equações na sua conceção mais ampla, revelando as relações existentes. No pensamento relacional atende-se às relações e propriedades fundamentais das operações aritméticas em vez de se focar exclusivamente nos procedimentos de cálculo (Carpenter et al., 2005).

Para ilustrar o que pretendem dizer com pensamento relacional, Carpenter et al. (2005) recorrem à exemplificação de diferentes formas de olhar para a seguinte igualdade: $8 + 4 = \_ + 5$. Uma hipótese que se levanta é que, para resolver a expressão, os alunos adicionem oito e quatro e depois pensem em quanto têm de adicionar a cinco para dar 12. Este processo conduz à resposta correta e é naturalmente válido. No entanto, o processo usado mantém-se no cálculo específico da expressão numérica e não tem em conta a relação entre os números. O aluno que apreenda a expressão numérica como um todo, pode considerar que cinco é mais um do que quatro e, por isso, o número a colocar no espaço em branco será menos uma unidade do que oito. Neste raciocínio, o aluno usa a seguinte relação para resolver o problema: $8 + 4 = (7 + 1) + 4 = 7 + (1 + 4)$, ou seja, pelo menos implicitamente, usa a propriedade associativa da adição para transformar a expressão numérica. Este tipo de transformações torna também o cálculo mais fácil e flexível. Esta forma de pensar, o pensamento relacional, representa uma importante passagem do foco aritmético para o foco algébrico.

Carpenter et al. (2003) salientam que é importante trabalhar o desenvolvimento do pensamento relacional desde a escola elementar, por duas grandes razões. A primeira prende-se com a facilidade que acarreta também para a aprendizagem da aritmética. Considerar o pensamento algébrico como parte integrante da aprendizagem da aritmética, torna a aprendizagem desta última mais significativa e rica. A segunda razão prende-se com a transição entre a aritmética e a álgebra nos anos mais avançados. Se os alunos aprenderem as operações aritméticas apenas como procedimentos para o cálculo, e nesta perspetiva o sinal de igual concebido como um impulsionador do cálculo, a aprendizagem da álgebra decorrerá com maiores dificuldades dado que esta exige a mobilização desse pensamento relacional.

Molina (2009) desenvolveu um estudo com alunos do 3.º ano de escolaridade do qual recolheu evidências sobre a capacidade de os alunos usarem o pensamento relacional na resolução de expressões numéricas que envolviam as propriedades aritméticas básicas. Estes alunos usaram as suas aprendizagens e experiências aritméticas para trabalhar a aritmética de modo algébrico, empregando um conjunto diversificado de estratégias na resolução de expressões aritméticas. A partir dos resultados desse estudo, a autora elencou um conjunto de aspetos que evidenciam a utilização do pensamento relacional no contexto do trabalho com expressões aritméticas: i) a consideração de expressões aritméticas desde o ponto de vista estrutural, evitando o enfoque na aritmética computacional de forma a desviar a atenção do valor numérico das expressões, ou seja, do resultado das operações; ii) a compreensão das expressões como um todo, suscetíveis de serem comparadas, ordenadas, igualadas e transformadas e a aceitação da sua estrutura aberta; iii) o desenvolvimento do sentido do número e do sentido das operações, facilitando a conceção das operações e das expressões numéricas como objetos e não só como processos; iv) a promoção da exploração, identificação e descrição de padrões e relações sobre os números e as operações, primeiros passos do processo de generalização; v) a utilização da representação horizontal, tradicionalmente mais própria da álgebra do que da aritmética; vi) promover a exploração da igualdade como representação de uma relação entre duas expressões assim como a interpretação bidirecional das igualdades e expressões; e, vii) a promoção da resolução de equações, no contexto da resolução de igualdades numéricas abertas.

Com o objetivo de tornar possível o pensamento relacional no trabalho com as operações, também Kieran (2004) propõe os seguintes ajustamentos no tratamento da aritmética: i) o foco nas relações e não apenas no cálculo e na resposta numérica; ii) o foco nas operações e nas suas inversas, e na ideia relacionada de operar/não operar; iii) o foco simultâneo na representação e na resolução, e não apenas na resolução; iv) o foco em números e letras, e não apenas nos números. Este último aspeto inclui: a) trabalhar com letras, que mais tarde poderão ser incógnitas, variáveis ou parâmetros; b) aceitar as expressões abertas como respostas; c) comparar expressões de equivalência baseadas mais nas propriedades do que na avaliação numérica; e, d) reforçar o significado do sinal de igual.

4.1.2 A conceção relacional do sinal de igual

Como foi referido na secção anterior, vários autores (Blanton & Kaput, 2005; Carpenter et al., 2005; Kieran, 2004; Molina, 2009) consideram importante desenvolver nos alunos uma compreensão relacional do sinal de igual.

A noção de igualdade tem um significado mais próximo de "equivalência" do que de identidade (Ponte et al., 2009). Por exemplo, na expressão numérica $5 + 2 = 7$, os termos à direita e à esquerda do sinal de igual não são idênticos, são equivalentes, pois representam o mesmo número. Assim, e de acordo com Ponte et al. (2009), em termos matemáticos, a relação de igualdade é uma relação de equivalência. Isso significa que esta tem subjacentes as seguintes propriedades: a) é simétrica (se $a = b$ então $b = a$, para quaisquer elementos a e b); é reflexiva ($a = a$, para todo o elemento a); e é transitiva (se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$, para quaisquer elementos a, b e c). Isso implica que uma completa compreensão relacional do sinal de igual requer a compreensão dessas três propriedades. Deste modo, e relativamente à propriedade de simetria, os alunos devem aceitar as duas expressões seguintes como verdadeiras: $13 = 7 + 6$ e $7 + 6 = 13$. Segundo, a propriedade reflexiva implica que os alunos aceitem declarações de identidade como $8 = 8$. Por último, no que concerne à propriedade transitiva, se um aluno aceitar como verdadeiras as expressões $7 + 6 = 13$ e $13 = 10 + 3$, deve ser capaz de concluir que $7 + 6 = 10 + 3$ (Baroody & Ginsburg, 1983).

No entanto, o símbolo que é usado para evidenciar a equivalência, o sinal de igual, nem sempre é interpretado desta forma pelos alunos. De facto, vários estudos mostram que uma interpretação do sinal de igual como equivalência parece não ser fácil para muitos alunos (e.g., Baroody & Ginsburg, 1983; Carpenter et al., 2003; Falkner et al., 1999; Kieran, 1981; Knuth et al., 2006).

Muitas vezes, na escola elementar, o sentido do sinal de igual é visto como resultado de uma operação, como operador, ou como denomina Kieran (1981), um símbolo "para fazer algo". Os estudos realizados por Behr, Erlwanger e Nichols (1976, citado em Kieran, 1981), com alunos com idades compreendidas entre os seis e os doze anos, mostram que têm a conceção do sinal de igual como operador e que a mesma não se altera facilmente no decurso da escolarização. Estes autores descobriram que os alunos: a) entendem o sinal de igual numa expressão numérica como $2 + 4 =$ como significando algo a ser feito; b) não entendem $3 + 2 = 4 + 1$ em termos de equivalência, mas antes como uma ação para restabelecer a expressão $3 + 2 = 5$ ou $5 = 4 + 1$; c) não aceitam o sinal de igual em expressões sem que seja precedido por um ou mais sinais de operação; d) têm uma tendência para realizar ações em vez de refletir; e e) não mudam a sua concepção do sinal de igual à medida que se tornam mais velhos. Para além destes aspetos, Baroody e Ginsburg (1983) evidenciam no seu estudo que os alunos aceitam apenas determinadas formas típicas de expressões numéricas:

> As crianças esperam que as equações escritas (horizontais) tenham uma forma particular: em problemas aritméticos contendo dois (ou mais) termos à esquerda, o resultado deve estar à direita, e no meio, um símbolo de ligação (por exemplo, $3 + 2 = 5$). As crianças tendem a rejeitar equações como $13 = 7 + 6$, $6 + 4 = 3 + 7$, e $8 = 8$, equações que não aderem à forma típica e que conduzem facilmente a uma interpretação do sinal de igual como operador. (p. 198)

Kieran (1981) refere que as limitações dos alunos relativamente ao sinal de igual podem estar relacionadas com a sua maturação cognitiva. Assim, esta autora refere que, até aos 13 anos de idade, os alunos assumem uma conceção do sinal de igual como operador, e só após essa idade poderão aceitar uma perspetiva mais relacional, concebendo esse sinal como símbolo de equivalência. No entanto, Baroody e Ginsburg (1983) argumentam que, embora essa conceção de maturação cognitiva possa ter pertinência, há que considerar também a perspetiva do ensino que o aluno teve, orientado, especialmente nos primeiros anos, para a conceção do sinal de igual como operador. Referem ainda que estas duas perspetivas têm implicações pedagógicas diferentes. A primeira, relacionada com o ensino, implica a mudança da instrução matemática para promover uma visão relacional do igual. Na segunda, relativa à inadequação conceptual estar relacionada com as limitações cognitivas, implica que a mudança da natureza da instrução possa não ter muito impacto.

Para tentar perceber se os alunos mais novos conseguem aceder a uma conceção mais relacional do sinal de igual, Baroody e Ginsburg (1983) realizaram um estudo com alunos com 6-9 anos de idade. Nesse estudo, os autores tentaram perceber se alunos dessas idades aceitariam como válidas formas diferentes de expressões numéricas, umas com as quais estavam familiarizados e outras que desconheciam ($13 = 7 + 6$ e $7 + 6 = XIII$, respetivamente). Para aceder melhor às conceções dos alunos sobre o sinal de igual, os autores analisaram separadamente as perceções sobre a aceitação de, ou familiaridade com, as diferentes formas e os seus julgamentos sobre a sua validade. Assim, puderam categorizar uma resposta na qual o aluno poderia dizer que $8 + 1 = 3 \times 3$ parecia estranho, mas que, mesmo assim, considerava verdadeira. Os resultados deste estudo mostraram que, independentemente da maturação cognitiva da criança, o ensino pode promover uma visão mais relacional do sinal de igual.

Quando o sinal de igual é introduzido na escola no contexto da adição, é interpretado em termos da ação do aluno na adição e naturalmente toma o significado de operador, como o que "produz" ou "resulta em". Apesar disso, Baroody e Ginsburg (1983) consideram que, eventualmente, muitos alunos podem aprender que o sinal de igual *também* tem um significado relacional. Parece, no entanto, que o efeito da assimilação (a inicial tendência para interpretar o sinal de igual em termos de ações de contagem) e a instrução na matemática que se segue (reforçando essa visão do sinal de igual como operador) não facilitam o processo. Embora considerando que pode até não ser possível, ou mesmo desejável, eliminar a visão de operador do sinal de igual, os autores referem que a introdução do sinal de igual pode ser feita em contextos para além da adição, como, por exemplo, primeiro apresentar o sinal de igual no contexto dos números equivalentes e não equivalentes ($8 = 8$, $6 \neq 7$, etc.). E posteriormente, quando a adição e outras operações forem introduzidas, devem ser usadas tanto as formas típicas como as formas menos convencionais das expressões numéricas.

Falkner et al. (1999) realizaram um estudo onde os professores propunham aos alunos a resolução do seguinte problema: $8 + 4 = \_ + 5$. Embora o problema pareça trivial para muitos professores, a maior parte dos alunos deu respostas erradas, mostrando como muitos, senão a maioria, tem conceções incorretas sobre o sinal de igual. O quadro seguinte mostra as respostas dadas por alunos de diferentes anos de escolaridade, do 1.º ao 6º.

TABLE 1

Percent of children offering various solutions to 8 + 4 = □ + 5

Grade	Answers Given					Number of Children
	7	12	17	12 and 17	Other	
1	0	79	7	0	14	42
1 and 2	6	54	20	0	20	84
2	6	55	10	14	15	174
3	10	60	20	5	5	208
4	7	9	44	30	11	57
5	7	48	45	0	0	42
6	0	84	14	2	0	145

Figura 4.1 – Respostas dos alunos ao problema “8+4=__+5”, (Falkner et al., 1999, p. 233).

Estes resultados mostram que muitos alunos não sabem que o sinal de igual revela uma relação entre duas quantidades equivalentes e consideram-no como um comando para o cálculo. Estas conceções incorretas impedem os alunos de aprender com compreensão ideias aritméticas básicas e reduzem a flexibilidade para representar e usar essas ideias, criando ainda maiores problemas quando se caminha para a álgebra. Os autores categorizaram os tipos de respostas que os alunos deram ao problema de acordo com a conceção sobre o sinal de igual que possuem. Por exemplo, no excerto seguinte é fácil perceber que Lucy entende o sinal de igual como um comando para o cálculo:

> Prof. – Podes dizer-me qual o número que é necessário colocar no espaço vazio para tornar esta expressão verdadeira?
> Lucy – (depois de uma breve pausa) Doze.
> Prof. – Como sabes que é 12?
> Lucy –Porque é a resposta, oito e quatro são 12. Eu contei 8, 9, 10, 11, 12. São 12.
> Prof. – E o que acontece ao cinco?
> Lucy – Fica aí.
> Prof. – Precisas fazer alguma coisa com ele?
> Lucy – Não. Só está lá. Não tem nada a ver com o oito e o quatro.
> Prof. – O que pensas que significa?
> Lucy – Eu não sei. Penso que não significa nada. Se calhar só está lá para nos confundir. Sabes, às vezes, a minha professora põe números a mais na história dos problemas para nos fazer pensar sobre o que temos de adicionar ou subtrair. (p. 10)

Como se percebe pelo excerto apresentado, para Lucy o sinal de igual significa que a resposta vem a seguir, resposta essa que é o resultado do cálculo anterior ao sinal de igual. O sinal de igual é entendido como um comando para o cálculo. Já nos dois excertos seguintes, o sinal de igual emerge como uma relação:

> Ricardo – (depois de uma breve pausa) É sete.
> Prof. – Como sabes que é sete?
> Ricardo – Bem, oito e quatro são 12. Então eu tive de descobrir o que por com cinco para dar 12, e vi que era sete.
> Prof. – E porque precisaste saber quanto é que precisavas juntar a cinco para dar 12?
> Ricardo – Porque eu tinha 12 aqui (apontando para a esquerda do sinal de igual), então eu tinha que ter 12 aqui (apontando para o lado direito do sinal de igual). E cinco mais sete são 12.
> Prof. – Alguns alunos disseram-me que tinham de por 12 no espaço vazio. O que pensas sobre isso?
> Ricardo – Isso não está certo. 12 e cinco, isso seria 17 e isso não é igual a 12. Estes dois lados devem ter o mesmo.

> Gina – (muito depressa) Sete.
> Prof. – Como sabes que é sete?
> Gina – Bem, eu vi que o cinco aqui (apontando para o cinco na expressão) é mais um do que o quatro aqui (apontando para o quatro na expressão), então o número no espaço vazio tinha de ser menos um do que oito. É sete.
> Prof. – Isso é muito interessante. Vamos tentar com outra: $57 + 86 = \_\_ + 84$.
> Gina –(quase imediatamente) É fácil. É 59.
> Prof. – Foi rápido!
> Gina – Sim. É como a outra. É apenas dois mais porque 84 é menos dois. (p. 13)

Estes dois alunos revelam uma conceção do sinal de igual que expressa uma relação. As expressões em ambos os lados do sinal de igual têm de representar o mesmo número. Revelam ainda que estão confortáveis na resolução deste tipo de expressões, enquanto que Lucy teve de adaptar as regras que tinha aprendido para calcular a expressão num contexto que não lhe era familiar. Ricardo calculou a soma no lado esquerdo do sinal de igual e encontrou um número que adicionado a cinco daria o mesmo resultado. Gina reconheceu de imediato a relação entre os dois lados da equação e a relação entre os números que compõem as duas expressões, tornando desnecessário fazer qualquer cálculo. Tanto Ricardo como Gina demonstraram compreender a utilização apropriada do sinal de igual, no entanto, a estratégia usada por Gina mostra maior compreensão e flexibilidade do que a usada por Ricardo. Gina considerou as relações entre as duas expressões aditivas da equação, não apenas a relação entre as respostas para dois cálculos. Esta capacidade para refletir sobre as relações, em expressões matemáticas como a referida, é crítica para pensar mais algebricamente e estreitar a ponte entre a aritmética e a álgebra.

Embora reconheçam que não existe uma trajetória linear seguida igualmente por todos os alunos para desenvolver a conceção do sinal de igual como uma relação, Carpenter et al. (2003) assinalam algumas *marcas de referência* que o professor deve ter em conta para desenvolver essa capacidade nos alunos:

1. A primeira marca de referência é quando os alunos conseguem ser explícitos sobre o que pensam sobre o sinal de igual. A crescente clareza na expressão da sua conceção, mesmo que incorreta, é um importante passo para que se alterem conceções erróneas.
2. A segunda marca de referência é evidente quando os alunos conseguem aceitar como verdadeiras expressões que não estejam na usual forma $a + b = c$. Ou seja, quando verificam que são verdadeiras expressões como as seguintes: $8 = 5 + 3$; $8 = 8$; $3 + 5 = 8 + 0$ ou $3 + 5 = 5 + 3$.
3. A terceira marca de referência assinala-se pelo reconhecimento de que o sinal de igual representa uma relação entre dois números iguais. Até este momento, os alunos só conseguem comparar os dois lados de uma equação fazendo o cálculo em cada lado (Um exemplo desta marca de referência é a estratégia utilizada por Ricardo no exemplo dado acima).
4. A quarta marca de referência acontece quando os alunos são capazes de comparar as expressões matemáticas sem as calcular (A estratégia de Gina é um exemplo da evidência desta marca de referência).

Apesar das limitações identificadas na conceção do sinal de igual, muitas investigações empíricas mostram que os alunos dos níveis elementares conseguem desenvolver uma compreensão relacional desse sinal, quando o ensino é intencionalmente desenhado com esse propósito.

Molina e Ambrose (2008) realizaram um estudo orientado pela conjetura de que os alunos da escola elementar podem desenvolver as suas conceções sobre o sinal de igual, trabalhando com expressões numéricas do tipo verdadeiro e falso. Neste estudo, com alunos com nove e 10 anos de idade, as autoras analisaram a evolução destes relativamente às suas conceções sobre o sinal de igual e as dificuldades que encontravam na resolução das expressões numéricas. Pela análise dos resultados, detetaram três fases de desenvolvimento da compreensão dos alunos sobre o sinal de igual: estímulo para uma resposta, expressão de uma ação e expressão de equivalência. A primeira fase, estímulo para uma resposta, refere-se à interpretação do sinal de igual como um símbolo operacional da esquerda para a direita, ou seja como um comando para dar uma resposta às operações expressas no lado esquerdo do sinal de igual. Nesta fase, os alunos tendem a resolver corretamente expressões do tipo $a + b = c$, mas não expressões com outras formas. A segunda fase, expressão de uma ação, refere-se à interpretação do sinal de igual como um símbolo operacional da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Nesta fase, os alunos resolvem corretamente expressões do tipo $c = a \pm b$, mas têm respostas incorretas em expressões da forma $a + b = c + d$. Nestes casos, focam-se em parte da equação que tem a forma $c = a \pm b$. Em outras formas, o extremo final da equação é considerada a resposta, por exemplo, um aluno respondeu cinco na expressão $12 + 7 = 7 + \_\_$, ignorando o sete do lado esquerdo do sinal de igual e focando-se em $12 = 7 + \_\_$. Outro aluno respondeu 12 à expressão $\_\_ + 4 = 5 + 7$, ignorando o quatro e focando-se em $\_\_ = 5 + 7$. Nesta fase, os alunos reconhecem a propriedade simétrica da relação de igualdade, embora não interpretem o sinal de igual como a expressão de uma equivalência: continuam a pensar sobre o símbolo como um estímulo para uma resposta, mas reconhecem que a resposta pode ser em cada lado do sinal de igual. Nas etapas do estímulo para a resposta e da expressão de uma ação, os alunos representam a "resposta" para a expressão na equação. As autoras atribuem isso à "falta de clausura", pois, estes alunos consideram as expressões numéricas como expressões de uma ação e não de uma relação. A última etapa, expressão de equivalência, refere-se à interpretação do sinal de igual como um símbolo relacional. Nesta etapa os alunos resolvem corretamente expressões em todas as formas consideradas.

Outro aspeto importante e que, muitas vezes acontece nas salas de aulas, é o facto de os alunos registarem os seus cálculos à medida que resolvem um problema, apresentando diversas expressões numéricas em linha, ligadas por vários sinais de igual. Quando os alunos têm já desenvolvido uma conceção relacional do sinal de igual, reconhecem que essas expressões numéricas ligadas não são, de facto, equivalentes. Molina e Ambrose (2006) apresentam uma situação de sala de aula que é exemplo do referido, em que era pedido aos alunos que indicassem se a expressão $3 + 3 + 3 = 9 + 12 = 11$ era falsa ou verdadeira e porquê. Um dos alunos referiu "Penso que é falso porque $3 + 3 + 3 = 9$ e $9 + 2 = 11$". Nessa altura, com o intuito de criar um conflito cognitivo que colocasse à prova as conceções dos alunos, as investigadoras colocaram a questão: "E não é isso que está lá dito?". Um dos alunos referiu que "$3 + 3 + 3$ não é igual a 11." (p. 115), revelando a sua compreensão relacional do sinal de igual. A importância da estratégia utilizada pelas investigadoras ao suscitarem o conflito cognitivo nos alunos é reconhecida como importante para Carpenter et al. (2003) ao considerarem que estes devem ser desafiados a revelar as suas conceções sobre o sinal de igual através da participação em discussões centradas no seu significado.

4.1.3. A generalização de relações numéricas e das propriedades das operações

Jacobs et al. (2007) consideram que, sem o desenvolvimento da capacidade da generalização, os alunos não conseguem apreender com profundidade as propriedades fundamentais das operações. Embora os algoritmos tradicionais sejam baseados nestas propriedades, a maioria tem os procedimentos escondidos para se tornar mais eficiente a sua utilização. Assim sendo, muitos alunos completam a escolaridade básica sem terem tido a oportunidade de usar apropriadamente as propriedades fundamentais das operações. Se os alunos não reconhecerem essas propriedades e não as aplicarem nos seus cálculos, não podem reconhecer a mesma base de ideias subjacentes à aritmética e à álgebra.

O ensino focado nas propriedades fundamentais das operações, por sua vez, torna também a aprendizagem da aritmética mais eficiente e providencia aos alunos formas de pensamento mais poderosas e flexíveis de aplicar a aritmética. Os alunos que têm sucesso a matemática não são apenas bons no cálculo e na manipulação de símbolos, mas fazem generalizações e reconhecem as relações entre conceitos e procedimentos, e, por isso, têm menos conceitos ou procedimentos para aprender e frequentemente são capazes de simplificar os seus cálculos.

Carpenter et al. (2005) apresentam o seguinte problema aditivo: $40 + 50$. Se os alunos pensarem no problema como adicionam quatro dezenas a cinco dezenas, o cálculo é baseado no mesmo princípio que se usa para adicionar $4\,x + 5\,x$. Em ambos os casos a propriedade distributiva é a base para adicionar quatro e cinco. A operação envolvida neste cálculo pode ser representada como:

$$40 + 50 = 4 \times 10 + 5 \times 10 = (4 + 5) \times 10 = 9 \times 10$$
$$4x + 5x = (4 + 5)x = 9x$$

Desta forma, se os alunos genuinamente compreenderem a aritmética de forma que possam explicar e justificar as propriedades que usam nos cálculos, estão a aprender algumas das bases mais críticas da álgebra. Quando o ensino da aritmética não é centrado nessas bases, os alunos começam a estudar álgebra e não conseguem perceber que os procedimentos que usam para resolver equações e manipular expressões algébricas se baseiam nas propriedades que usaram na aritmética.

O pensamento relacional é uma forma de raciocinar que não está ligada a procedimentos particulares ou combinações numéricas, pois os alunos que pensam relacionalmente identificam as relações numéricas e raciocinam sobre que transformações fazem sentido naquele problema em particular. Para isso precisam ter apreendidas relações numéricas e propriedades fundamentais que podem usar para justificar os seus procedimentos (Jacobs et al., 2007). Esta capacidade de utilizar as relações numéricas para o cálculo é extremamente poderosa no cálculo mental. Por exemplo, para calcular 5×499, o aluno pode fazer $5 \times 500 = 2500$ (a partir do facto multiplicativo e memorizado $5 \times 5 = 25$ e da multiplicação por 100) e, em seguida, retirar cinco, ficando $5 \times 499 = 5 \times 500 - 5 = 2495$.

No exemplo seguinte, Jacobs et al. (2007) mostram como a capacidade de construção de relações gerais explícitas pode ser poderosa e atender tanto os princípios da aritmética como da álgebra. Era pedido aos alunos que indicassem se a expressão "$78 - 49 = 78$" era verdadeira ou falsa:

> Alunos – Falsa. É falsa.
> Prof. – Porque é que é falsa?
> Jenny – Porque é o mesmo número do princípio e se já tiraste alguma coisa, tem de ficar menos do que o número com que começaste.
> Mike – A não ser que fosse 78 – 0 = 78. Isso estaria correto.
> Prof. – É verdade? Porque razão é verdade? Nós também tiramos alguma coisa.
> Steve – Mas isso era alguma coisa, agora não é nada. O zero é nada. (p. 263)

No exemplo acima referido, a turma conseguiu formular a seguinte regra: "Zero subtraído a outro número é igual a esse número". Assim, os alunos usaram a sua compreensão sobre o zero para avaliar um caso particular e conseguiram formar uma regra geral, ou seja, a generalização. Este exemplo revela como os alunos da escola elementar conseguem formular e expressar generalizações usando a linguagem natural.

Pimentel e Vale (2009) analisam a relação entre o desenvolvimento do cálculo mental e do sentido de número com base na descoberta de padrões numéricos e concluíram que, tendo em conta essa relação dialética, a identificação de padrões numéricos e sua consequente generalização torna-se a base de emergência do pensamento algébrico. O excerto seguinte mostra um exemplo dessa relação:

> Multiplicar um número por 19 é o mesmo que multiplicá-lo por 20 e em seguida subtrair o número. Este é um caso especial da propriedade distributiva, cuja descrição algébrica é $19n = 20n - n$. Esta descrição gera uma analogia com a aritmética. Por exemplo, para resolver o problema de determinação da quantia gasta ao comprar 19 cadernos a 4 euros cada, podemos resolvê-lo através do cálculo mental, fazendo $19 \times 4 = 20 \times 4 - 4$. (Pimentel & Vale, 2009, p. 60)

A exploração de situações como esta enquadra-se na perspetival de Fujii e Stephens (2008), que defendem a utilização de expressões numéricas generalizáveis, através do que denominam como *pensamento quase-variável*, como ponte entre a aritmética e a álgebra por permitirem a exploração de padrões de variação. Neste sentido, Stephens (2006) refere que o desenvolvimento do pensamento relacional depende de os alunos serem capazes de ver e usar possibilidades de variação entre os números de uma expressão numérica. Este autor considera a capacidade de usar a variação numa expressão numérica como uma importante característica do pensamento relacional, argumentando que é essencial que os alunos identifiquem as direções dessa variação e não apenas que reconheçam a sua existência. Assim, o pensamento relacional pode ser expresso através de uma grande variedade de métodos e formas, mas que dependem sempre das ideias fundamentais de equivalência e compensação requeridas em operações particulares (Stephens, 2006). Também Irwin e Britt (2005) reconhecem que os métodos de compensação e equivalência que alguns alunos usam na resolução de expressões numéricas constituem evidências da utilização do pensamento relacional.

Stephens e Wang (2008) aplicaram um questionário a alunos dos 6.º e 7.º anos de escolaridade, com o objetivo de perceber como mobilizavam o pensamento relacional na exploração de expressões numéricas. As questões do questionário envolviam a igualdade e a compensação aplicadas às quatro operações aritméticas. As questões foram categorizadas em três tipos:

Tipo I) Expressões numéricas com um número "em falta" ou um número "desconhecido" que poderiam ser resolvidas através do cálculo ou usando o pensamento relacional:

$$\boxed{43 + \square = 48 + 76, \quad 39 - 15 = 41 - \square, \quad \square \times 5 = 20 \times 15, \quad 21 \div 56 = \square \div 8}$$

Figura 4.2 - Questões do Tipo I, (Stephens & Wang, 2008, p. 29).

Tipo II) Expressões envolvendo dois números desconhecidos, mas inter-relacionados:

(a) In each of the sentences below, can you put numbers in Box A and Box B to make each sentence correct?

$18 + \square = 20 + \square$
Box A Box B

$18 + \square = 20 + \square$
Box A Box B

$18 + \square = 20 + \square$
Box A Box B

(b) When you make a correct sentence, what is the relationship between the numbers in Box A and Box B?

(c) If instead of 18 and 20, the first number was 226 and the second number was 231 what would be the relationship between the numbers in Box A and Box B?

(d) If you put any number in Box A, can you still make a correct sentence? Please explain your thinking clearly.

(e)What can you say about c and d in this mathematical sentence? $c + 2 = d + 10$

Figura 4.3 - Questões do Tipo II e III, (Stephens & Wang, 2008, p. 31).

Tipo III) Expressões semelhantes às segundas, mas envolvendo símbolos, correspondendo à alínea c) da Figura 4.3: “$c + 2 = d + 10$”. Estes dois últimos tipos de questões tinham como principal objetivo mobilizar a utilização do pensamento relacional, pois embora fosse possível usar o cálculo para obter alguns exemplos particulares, a identificação da estrutura relacional da expressão exigiria a mobilização do pensamento relacional.

Os autores categorizaram as respostas dos alunos às questões de tipo II e III de acordo com o pensamento relacional evidenciado em: a) pensamento relacional emergente, b) pensamento relacional consolidado e c) pensamento relacional estabelecido. Explicita-se, em seguida, cada uma destas categorias:

A) Os estudantes com pensamento relacional emergente, tipicamente: a) identificam algumas características dos números usados nas caixas A e B, mas não especificam completamente a relação entre os números usados; b) focam-se nessa caraterística quando tentam explicar como qualquer número pode ser usado na caixa A e manter verdadeira a expressão, mas, de novo, são incapazes de descrever de forma completa essa relação; c) tentam dar um par de valores corretos para os quais e tornam a expressão verdadeira, ou nem tentam resolver esta questão.

B) Os estudantes com pensamento relacional consolidado: a) quase sempre são capazes de especificar a relação entre os números das caixas A e B com clara referência aos números, incluindo a magnitude e a direção da diferença entre eles; b) às vezes, são capazes de dar uma explicação completa sobre como um número qualquer poder estar na caixa A e continuar a ser uma expressão verdadeira; c) normalmente são capazes de referir algumas características da relação entre c e d, ou de dar um par de valores específicos para c e d, mas não conseguem dar uma explicação completa da relação.

C) Os estudantes com pensamento relacional estabelecido são quase sempre capazes de: a) especificar a relação entre os números das caixas A e B com claras referências aos números, incluindo a magnitude e direção da diferença entre ele; b) empregar uma forma semelhante nas palavras usadas para descrever a relação como uma parte da condição que descreve como qualquer número pode ser usado na caixa A e manter a expressão verdadeira; c) explicar claramente como c e d estão relacionados para que a expressão do tipo III seja verdadeira, tratando c e d como variáveis.

Stephens e Wang (2008) concluem com este estudo que as questões que envolvem dois "números desconhecidos" impelem os alunos a mobilizar o pensamento relacional. Assinalam que os resultados demonstraram que os alunos que revelavam um pensamento relacional emergente evidenciavam uma conceção limitada da noção de variável, concentrando a sua atenção em algumas características da relação numérica, mas não a apreendendo no seu todo. Também os estudantes que revelavam um pensamento relacional consolidado conseguiam atribuir valores a c e d, mas não os tratavam como variáveis.

Para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico, no respeitante ao pensamento relacional, podem ser consideradas as três sugestões de Fujii (2003): i) descrever e fazer uso do processo de generalização e das propriedades estruturais da aritmética, de forma geral; e de expressões com quase-variáveis em particular; ii) generalizar soluções para os problemas aritméticos que permitam aos alunos desenvolver o conceito de variável de modo informal; e, iii) providenciar oportunidades para os alunos discutirem as suas estratégias de resolução e evidenciarem os processos e ideias matemáticas fundamentais.

4.2 O pensamento funcional

4.2.1 Aspetos gerais

As orientações curriculares nacionais e internacionais, habitualmente, situam o estudo das funções ao nível do 3.º ciclo (alunos com 12-13 anos), no entanto, diversas investigações têm evidenciado que alunos bastante mais novos podem começar a desenvolver o pensamento funcional (e. g., Barbosa, 2010; Blanton & Kaput, 2005; Carraher & Schliemann, 2007; Santos, 2008; Warren & Cooper, 2005).

Também em Portugal, Ponte et al. (2009) reconhecem que “a aprendizagem do conceito de função é preparada desde os 1.º e 2.º ciclos” (p. 118). Estes autores evidenciam que o estudo de sequências pelos alunos destes ciclos de escolaridade permite-lhes trabalhar já com funções de variável natural, onde a cada número (ordem) fazem corresponder um dado termo, que pode ser um número, um objeto geométrico ou outro objeto qualquer. Na brochura de apoio à implementação do PMEB (ME, 2007), *Álgebra no Ensino Básico*, os referidos autores assinalam, no 1.º ciclo, a importância do trabalho com problemas que envolvam o raciocínio proporcional, com a exploração de sequências e tabelas como base para o desenvolvimento da noção de proporcionalidade. Embora só no 3.º ciclo sejam trabalhadas as situações de proporcionalidade direta na conceção de função (linear), assume-se nos ciclos anteriores a importância do trabalho de preparação do conceito. Percorrendo todo o ensino básico, e tendo como principal objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico, o trabalho em torno do tópico Sequências e Regularidades permite, desde os primeiros anos, a progressão de um raciocínio de natureza mais recursiva para o desenvolvimento das relações funcionais (Ponte et al.,2009). De acordo com Eisenmann (2009), o pensamento funcional começa a desenvolver-se no indivíduo muito antes de o conceito de função ser introduzido na escolarização. Já na frequência do pré-escolar as crianças encontram uma variedade de acontecimentos de causa e dependência na sua vida diária, e assim começam a desenvolver o sentido da causalidade. De acordo com este autor, o ensino na escola elementar deve ajudar os alunos a identificarem variados tipos de mudança e dependência, os quais fazem parte dos acontecimentos do mundo real, assim como a se familiarizarem com as suas representações. Estes são aspetos que conduzem à compreensão gradual do conceito de função.

O NCTM (2000) defende que a noção de variação deverá ser trabalhada desde muito cedo na escolaridade, sendo essencial para a construção da noção de função. Assim, os alunos podem começar por descrever a variação qualitativa – “Fiquei mais alto durante o verão”, por exemplo – e mais tarde, a variação quantitativa – “Cresci 5 cm ao longo do ano passado”. Neste sentido, também Ponte et al. (2009) consideram que podem ser estudados muitos fenómenos da vida real, alguns dos quais com taxa de variação constante (isto é, “para qualquer valor de x, a razão entre o incremento na variável dependente y e o incremento na variável independente x é constante” (p. 120)) que podem ser representados por uma função afim, linear ou não linear. Para além desses tipos de variação, os alunos devem ainda contactar com outros fenómenos cujas taxas de variação não sejam constantes.

Para Blanton (2008), o pensamento funcional é um processo de construir, descrever, e raciocinar sobre funções e envolve o pensamento algébrico porque inclui fazer generalizações sobre o modo como os dados estão relacionados. Na perspetiva desta autora, as funções são o núcleo do pensamento funcional. Uma função é uma afirmação matemática que descreve como duas (ou mais) quantidades variam na relação entre elas. Essa relação pode ser muito simples ou mais complexa e pode ser descrita por palavras ou por símbolos matemáticos e expressa através de representações como gráficos ou tabelas. Embora existam muitos tipos de relações entre quantidades, as funções são especiais porque refletem um tipo particular de correspondência entre duas quantidades. O pensamento funcional é uma parte crítica do desenvolvimento matemático e a introdução de ideias informais sobre funções na escola elementar permite aos alunos o tempo e o espaço para desenvolver uma compreensão mais complexa quando encontrarem funções nos anos posteriores (Blanton, 2008).

Carraher e Schliemann (2007) consideram que centrar o ensino da álgebra nas funções compreende entender as letras como variáveis, em vez de incógnitas, interpretar expressões como regras das funções e o sistema cartesiano de coordenadas como uma representação dos resultados dos cálculos, e ainda, ter em conta os múltiplos significados do sinal de igual. De acordo com Carraher et al., (2008) a perspetiva funcional amplia o significado de expressões algébricas tratando o "x" como variável, ou seja, como um objeto que pode variar o seu valor. Estes autores defendem que, a partir desta abordagem, os alunos são encorajados a evoluir no seu pensamento sobre as operações com números específicos para atender às relações entre variáveis.

Mais recentemente, Blanton et al. (2011) referem que o pensamento funcional inclui "generalizar relações entre quantidades que covariam, expressar essas relações em palavras, símbolos, tabelas ou gráficos e raciocinar com essas várias representações para analisar o comportamento das funções" (p. 47).

Smith (2008) refere-se ao pensamento funcional como o *pensamento representacional* que se foca nas relações entre duas (ou mais) quantidades que variam, e mais especificamente, como o tipo de pensamento que conduz das relações específicas para a generalização dessas relações.

> O raciocínio algébrico que diz respeito ao pensamento funcional ocorre quando a criança inventa ou apropria sistemas representacionais adequados para representar a generalização de uma relação entre quantidades que variam. (Smith, 2008, p. 143)

De acordo com este autor, a génese do pensamento funcional acontece quando o aluno se envolve numa atividade, escolhe prestar atenção às quantidades que variam e começa a focar-se na relação entre essas quantidades. Esse processo, embora seja individual, acontece no contexto social, pela sugestão de exploração de determinados problemas pelo professor e pelo envolvimento na discussão e negociação em sala de aula. Quando os alunos se envolvem na resolução de problemas desta natureza, tendem (ou lhes é solicitado) a criar um registo que, normalmente, tem a forma de uma tabela, mas que pode e deve ser completado com outras formas de representação. A análise desse registo passa, muitas vezes, pela abordagem covariacional em que os alunos se focam na variação das variáveis individuais e na sua relação, ou seja, na covariação. Esta abordagem é, muitas vezes, escolhida pelos alunos que reconhecem os padrões a partir da leitura de cima para baixo nas linhas da tabela (por exemplo, quando x aumenta 1, y aumenta 2). Esta abordagem pode ser eficiente e permitir que, posteriormente, os alunos se foquem na relação entre os correspondentes pares de variáveis, ou seja, passem a ter uma abordagem de correspondência da relação (por exemplo, a relação entre x e y pode ser descrita como o dobro de x mais um: $y = 2x + 1$). Em suma, Smith (2008) refere que é essencial desenvolver contextos que permitam aos alunos a construção de relações funcionais, conectar as ações do contexto com o sistema representacional e depois construir uma *certeza matemática* sobre essas relações.

Warren e Cooper (2005) referem que o pensamento funcional também diz respeito às relações entre operações, particularmente no que respeita às relações inversas. Os autores argumentam que essas ideias serão basilares no tratamento das funções nos anos mais avançados e que, para além disso, ajudam os alunos a explorar a aritmética como variação, a fazer conexões entre as diferentes operações e providenciam oportunidades para fazer conjeturas e justificações desde os níveis elementares.

Carraher e Schliemann (2007) consideram que as operações aritméticas podem ser entendidas como funções. Num estudo anterior, Carraher et al. (2006) focaram-se nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão enquanto funções. De acordo com a sua perspetiva de introduzir o conceito de função no contexto das operações, consideram que, por exemplo, na adição a expressão “+3” representa não só uma operação que atua num número particular mas também a relação entre um conjunto de valores de entrada (*input*) e um conjunto de valores de saída (*output*). Pode representar-se a operação como adicionando através de uma notação de função padrão como $f(x) = x + 3$, ou através de uma notação de aplicação (*maping*, no original) como $x \rightarrow x + 3$. Adicionar três, portanto, equivale a $x + 3$, uma função em x. Consequentemente, os objetos da aritmética podem ser considerados tanto particularmente (se $n = 5$, então $n + 3 = 5 + 3 = 8$) como numa dimensão geral ($n + 3$ representa uma aplicação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$).

Blanton e Kaput (2005) sugerem os seguintes exemplos de aspetos do pensamento algébrico na perspetiva do pensamento funcional: i) simbolizar quantidades e operar com expressões simbólicas, como, por exemplo: usar símbolos para modelar problemas, usar símbolos para operar com expressões simbólicas; ii) representar dados graficamente; iii) descobrir relações funcionais, por exemplo: explorar a correspondência entre quantidades ou relações recursivas e desenvolver uma regra para descrever essa relação, usar tabelas para explorar a relação entre a variável dependente e a variável independente, descobrir, descrever, justificar e simbolizar relações matemáticas entre quantidades que variam; iv) prever resultados desconhecidos a partir de dados conhecidos, por exemplo: formular conjeturas sobre dados desconhecidos a partir dos dados conhecidos, estendendo o problema; e v) identificar e descrever padrões numéricos e geométricos, por exemplo identificar regularidades numéricas que, por vezes, são apresentadas geometricamente, identificar regularidades geométricas e regularidades em conjuntos de expressões numéricas.

4.2.2. Do pensamento recursivo ao pensamento funcional

Blanton (2008) exemplifica uma possível forma de trabalhar o pensamento funcional com alunos mais novos, propondo a análise de um problema em que se considera a relação entre o número de cães e o respetivo número de olhos. A exploração do problema poderá conduzir os alunos à apreensão da relação funcional, expressando-a através de palavras, tais como “o número total de olhos é igual ao número de cães multiplicado por dois” ou através de símbolos "$O = 2 \times n$", sendo "O" o número de cães e "n" o número de olhos de "n" cães. É de salientar que como a um número particular de cães corresponde um único número particular de olhos, a correspondência entre o número de cães e o número de olhos pode ser encarada como *função*. Independentemente de como se representa essa relação, ou função, a potencialidade da tarefa, tendo em vista o desenvolvimento do pensamento algébrico, está em permitir encontrar o número total de olhos para *qualquer número* de cães.

A partir dessa situação, Blanton (2008) apresenta diferentes possibilidades de exploração de uma tabela com duas colunas, uma com o número de cães (variável independente) e outra com o número de olhos (variável dependente). Na exploração dessa tabela podem usar-se diferentes metodologias. Se nos centrarmos na exploração do padrão a partir de uma estratégia recursiva, podemos olhar apenas para a coluna da variável dependente, focando-nos no número de olhos que varia, sem relacioná-la com a coluna da variável independente. Muitas vezes, os alunos traduzem este padrão recursivo da seguinte forma “adicionar sempre dois” e não referem como as duas variáveis se relacionam. Outra exploração possível é a identificação de que quando o número de cães aumenta na relação de mais um, o número de olhos aumenta na relação de mais dois, permitindo a análise de como as quantidades variam uma em relação à outra, ou seja, reconhecer a covariação das quantidades. No entanto, podemos usar esta análise horizontal entre as colunas da tabela para encontrar a correspondência entre as quantidades. Isso requer pensar sobre que operação em um número particular de cães leva ao correspondente número de olhos, conduzindo-nos à identificação da relação funcional que, ao contrário da utilização de uma estratégia recursiva, permite obter o termo de qualquer ordem sem que seja necessário conhecer os termos anteriores.

A forma como Blanton (2008) exemplifica a exploração de uma situação com o objetivo de desenvolver o pensamento funcional dos alunos é consistente com o quadro teórico desenvolvido por Smith (2008). De facto, este autor apoia-se na distinção entre duas formas significativas de abordagem das relações numa função: a covariação entre quantidades e a correspondência entre quantidades. Na abordagem relativa à covariação entre quantidades considera-se que à medida que uma quantidade muda de acordo com um padrão previsível e reconhecido, a outra muda tipicamente de acordo com um padrão diferente. Ou seja, se conseguirmos definir como $x1$ muda em relação a $x2$ e como $y1$ muda em relação a $y2$, podemos descrever uma relação funcional entre x e y. Na abordagem de correspondência entre os valores de duas quantidades considera-se que se pode descrever y (ou $f(x)$), dado um particular valor de x. Confrey e Smith (1994) consideram que, embora a abordagem de correspondência seja, tradicionalmente, mais aplicada no ensino, a abordagem covariacional poderá ser mais poderosa, especialmente nas primeiras explorações das funções. Neste sentido, Ellis (2011) refere que a construção de relações quantitativas pode suportar uma compreensão inicial das funções através da perspetiva de covariação e, mais tarde, servir de base para construir uma conceção de função mais flexível, que inclua a perspetiva da correspondência.

Desta forma, Blanton e Kaput (2011) usam o seguinte quadro teórico para analisar o tipo de pensamento funcional que ocorre na sala de aula:

1) *Padrões recursivos*: envolve encontrar a variação numa única sequência de valores;
2) *Pensamento covariacional*: é baseado na análise de como duas quantidades variam simultaneamente e mantém essa variação como uma parte explícita e dinâmica da descrição da função (por exemplo, se x aumenta em 1, y diminui em 3);

3) *Relações de correspondência*: baseadas na identificação de uma correlação entre variáveis (por exemplo, y é três vezes x mais dois).

Este quadro teórico inclui as três formas de percecionar relações numa função: recursivas, de covariação e de correspondência, de acordo com Smith (2003). Como, normalmente, o pensamento recursivo indica como se obtém um termo numa sequência de acordo com o termo ou termos anteriores tem limitada aplicabilidade nos níveis mais elementares. Outra limitação deste tipo de pensamento é que não envolve qualquer análise da variável independente, ou seja, não contempla a relação entre variáveis. Assim, e de acordo com Blanton et al. (2011), enquanto que encontrar padrões recursivos é muitas vezes o primeiro passo para compreender os dados, o pensamento funcional requer olhar para além de uma simples sequência de valores, atendendo à relação entre as variáveis. Desta forma, requer que seja feita uma abordagem por covariação, compreendendo como as quantidades variam uma em relação à outra, e, gradualmente, que os alunos identifiquem a forma como as duas variáveis se relacionam entre si, ou seja, como se obtém uma a partir da outra. No entanto, embora a utilização do pensamento covariacional seja importante para o desenvolvimento do pensamento funcional, a abordagem por correspondência entre os valores das duas variáveis é mais sofisticada e poderosa, dado que permite determinar, de modo imediato, para qualquer valor da variável independente (no domínio da função) o correspondente valor da variável dependente.

Para além destas abordagens, Martinez e Brizuela (2006) identificaram uma abordagem com características diferentes, que denominaram como híbrida. O estudo destas autoras centrou-se na resolução de um problema envolvendo uma sequência crescente que explorava a relação entre o número de mesas retangulares e o número de lugares quando as mesas estavam dispostas lado a lado. A análise centrou-se na resolução de uma aluna do 3.º ano de escolaridade, Marisa, através da exploração de uma tabela de função. A resolução desta aluna consistiu em adicionar um número ao valor da variável independente de forma a obter o valor da variável dependente, referindo que "o número que adiciono para obter o *output* através do *input* é sempre um a mais do que na linha anterior" (p. 294). Nessa abordagem híbrida, a aluna percecionou uma relação entre os valores das variáveis independente e dependente, mas, simultaneamente, mas através de um padrão recursivo (Figura 4.4).

Number of tables	Seating
1	$\xrightarrow{+3}$ 4
2	$\xrightarrow{+4}$ 6
3	$\xrightarrow{+5}$ 8
4	$\xrightarrow{+6}$ 10
5	$\xrightarrow{+7}$ 12
6	$\xrightarrow{+8}$ 14
50	$\rightarrow$ 102
60	$\rightarrow$ 122
100	$\rightarrow$ 202
x	$\rightarrow x\,.\,2+2$

Figura 4.4 – Ilustração da resolução de Marisa, no estudo de Martinez e Brizuela (2006, p. 292).

Embora a resolução de Marisa não relacione diretamente os valores das variáveis independente e dependente, é estabelecida uma relação entre elas, e isso é um dos elementos característicos de uma abordagem funcional. No entanto, a aluna precisa conhecer os valores anteriores recursivamente e isso acarreta dificuldades na generalização. Ainda assim, esta abordagem indica um progresso relativamente a abordagens puramente recursivas por considerar a relação entre variáveis (Stephens, 2012). Martinez e Brizuela (2006) consideram, portanto, que esta abordagem tem, em simultâneo, características de uma abordagem recursiva e de uma abordagem funcional.

A abordagem utilizada por esta aluna foi também identificada no estudo de Tanish (2011) com a exploração de tabelas de função por alunos do 5.º ano de escolaridade. Este autor considera que, com esta abordagem, os alunos constroem um "padrão instrumental" que é expresso por uma coluna intermédia na tabela. Desta forma, quando um número é adicionado ao número da coluna da variável independente, obtém-se o número da coluna da variável dependente, resultando a construção de um padrão instrumental pela descoberta da diferença entre os valores das variáveis independente e dependente. Tanish (2011) classifica esta abordagem como "parcialmente recursiva".

No acesso à compreensão das relações funcionais, as representações têm um papel relevante. Podem ter diferentes formas, como imagens, tabelas de função, gráficos, materiais manipulativos, símbolos matemáticos ou até a linguagem natural. Ponte et al. (2009) sintetizam as formas de representação de funções em quatro modos principais: i) através de enunciados verbais, utilizando a linguagem natural; ii) graficamente, usando esquemas, diagramas, gráficos cartesianos e outros gráficos; iii) aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados; e, iv) algebricamente, usando símbolos literais, fórmulas e correspondências. A compreensão dos alunos sobre funções depende também do desenvolvimento da capacidade de usar uma variedade de representações e da utilização e compreensão das conexões entre elas.

Assentes no pressuposto de que o conceito de função necessita de um longo período para a sua compreensão e tendo em conta as evidências de que os alunos mais novos conseguem apreender e construir as bases do pensamento funcional, são diversos os estudos que centram o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir da exploração de funções. Considerando a importância das tarefas, nomeadamente de natureza problemática e investigativa pela sua potencialidade no desenvolvimento do pensamento algébrico (Canavarro, 2009), apresentam-se, em seguida, algumas considerações sobre dois cenários possíveis para a promoção do pensamento funcional: i) a exploração de problemas contextualizados e, ii) a exploração de sequências. Estes dois cenários não são divergentes, pois a resolução de problemas pode ser feita no contexto das sequências. Considera-se, no entanto, importante ressaltar algumas características próprias de cada uma das abordagens.

4.2.3 A exploração de problemas contextualizados

A utilização de problemas contextualizados tem particular importância na introdução da compreensão das relações funcionais, especialmente para os alunos mais novos. Para Willoughby (1999) e Davidenko (1999) a introdução dos conceitos de função e variável deve fazer-se a partir de contextos concretos que vão progressivamente aumentando em abstração. Willoughby (1999) realizou um estudo onde implementou tarefas para desenvolver o conceito de função com alunos desde o pré-escolar ao 6.º ano de escolaridade, mantendo o princípio de utilizar contextos concretos no início da sua abordagem. Davidenko (1999) propõe a introdução do conceito de função a partir da organização de informação significativa para o aluno, como uma notícia de jornal ou revista. Tabach e Friedlander (2008) consideram importante criar um contexto de modelação ancorado na realidade, de forma a dar sentido aos conceitos mais abstratos. Também Ponte et al. (2009) consideram que o trabalho com funções deve desenvolver-se sobretudo em situações contextualizadas.

De acordo com Ellis (2011), uma das formas de promover o pensamento funcional é incentivar os alunos a raciocinarem sobre quantidades e a relação entre elas em problemas contextualizados. Neste sentido, a autora refere que a exploração de problemas significativos, que requeiram que os alunos identifiquem relações entre quantidades, pode ser a base para a introdução no pensamento funcional.

Carraher et al. (2008) consideram a utilização de problemas com contextos ricos para suportar a compreensão dos conceitos mais abstratos, um dos três aspetos definidores da *Early Algebra*, como foi referido no segundo capítulo deste trabalho. Os autores justificam a necessidade da *Early Algebra* se alicerçar em problemas contextualizados com a forma de aprendizagem dos alunos destas idades, em que usa uma mistura de "intuição, crenças, e factos presumíveis em conjunto com raciocínio de princípios e argumentos" (p. 236).

Central à abordagem dos estudos de Carraher et al. (2008) são os problemas contextualizados para situar e aprofundar a aprendizagem da matemática e da generalização e a utilização de múltiplas representações, como a linguagem natural, a linha numérica, tabelas de função, gráficos cartesianos e a notação algébrica. Estes autores reconhecem que a utilização de problemas contextualizados e a focalização na relação entre quantidades providencia significação às relações e estruturas matemáticas. No entanto, também reconhecem que os alunos devem beneficiar de oportunidades para começarem a usar as suas representações intuitivas e gradualmente adotarem as representações convencionais, incluindo o uso de letras para representar variáveis, utilizando-as como ferramentas para representar e compreender as relações matemáticas.

O estudo de Warren, Miller e Cooper (2011), com alunos dos 3.º e 4.º anos de escolaridade, focou-se na identificação, previsão e justificação de regras funcionais a partir de uma situação problemática envolvendo uma máquina de função. A vantagem da utilização das máquinas de função, de acordo com os autores, é o facto de evidenciar explicitamente as variáveis envolvidas nas relações em estudo, como valores de *input* (variável independente) e valores de *output* (variável dependente). Como resultados deste estudo, os autores referem que, desde que ambas as variáveis estejam explicitamente representadas, como a utilização de máquinas de função possibilita, os alunos conseguem lidar com problemas envolvendo uma relação funcional entre variáveis.

Carraher et al. (2008) apresentam os traços gerais de uma trajetória que desenvolveram com a resolução de problemas e a sua relação com o desenvolvimento do pensamento funcional. Para exemplificar como os alunos iniciam a compreensão do sentido de variável e de variação em matemática, os autores apresentam a primeira tarefa que exploraram em turmas do 3.º ano de escolaridade: "A caixa de bombons". Nesta tarefa eram apresentadas duas caixas de bombons pertencentes a duas crianças diferentes (Mary e John), referindo-se que as duas tinham a mesma quantidade de bombons, mas sem que fosse referido qualquer número. Para além disso era referido que Mary tinha mais três bombons fora da caixa. Quando foi solicitado para expressarem por escrito o que sabiam sobre o número de bombons que John e Mary tinham, a maior parte dos alunos fez um desenho. Nesses desenhos duas características distintas emergiram: os desenhos que se focavam num valor particular de bombons para cada criança da história e os desenhos que não especificavam um valor particular e ainda evidenciavam que Mary tinha mais três bombons do que John. Uma dessas alunas explicou assim a sua representação: “Penso que Mary tem mais do que o John porque ela tem mais três bombons do que ele. Se tirássemos esses três, ela teria a mesma quantidade do que o John” (p. 240). Um outro aluno representou a quantidade de bombons de cada caixa usando um ponto de interrogação, mas quando lhe foi pedido para explicar, referiu que o seu palpite era que cada caixa teria oito bombons. De acordo com Carraher et al. (2008), o pensamento deste aluno enfatiza a natureza indeterminada das quantidades quando utiliza o ponto de interrogação para as representar, mas não evidencia ainda o sentido de variável, pois o aluno usa um valor específico como se fosse um valor único na sua explicação.

Em seguida, foi introduzida uma tabela para o registo das possíveis quantidades com o objetivo de realçar a relação entre elas. Depois desta intervenção, os autores introduziram N para representar a quantidade de bombons que John tinha, e alguns alunos sugeriram que a quantidade de bombons de Mary se poderia representar como $N + 3$. Um dos alunos explicou: “Se ela tinha mais três do que John, escrevemos N mais três porque ela podia ter qualquer quantidade mais três” (p. 245). Outro aluno explicou a mesma ideia usando um exemplo particular: “Porque é qualquer número, como se fosse 90... adicionávamos três e seria 93” (p. 246). Embora este último aluno tenha usado um valor específico, ele usou-o claramente como exemplo, demonstrando perceber a natureza variável dessa quantidade. Assim, de acordo com Carraher et al. (2008), os alunos foram capazes de mudar o foco da sua atenção dos casos individuais para casos gerais. Os autores concluem que problemas deste género permitem a exploração de relações funcionais e a sua generalização, e também a progressiva introdução de diferentes representações como as tabelas e a notação simbólica.

4.2.4. A exploração de sequências[2]

Ponte et al. (2009) referem que o trabalho com sequências (numéricas e pictóricas) envolve a procura de regularidades e o estabelecimento de generalizações. De acordo com o NCTM (2000), a experiência sistemática com padrões pode constituir-se como uma base para a compreensão da noção de função. O NCTM (2000) advoga que a exploração de padrões deve iniciar-se nos primeiros anos de escolaridade, esperando que os alunos do 2.º ano consigam "reconhecer, descrever e ampliar padrões (...) e interpretá-los em diversas representações; analisar a forma como são gerados tanto os padrões de repetição como os de crescimento" (p. 104) e até ao final do 5.º ano, os alunos devem ser capazes de "descrever, ampliar e fazer generalizações de padrões geométricos e numéricos; representar e analisar padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos" (p. 182). Nesta linha de pensamento, Carraher et al. (2008) consideram que a exploração de padrões pode ajudar os alunos a compreenderem as relações de dependência entre quantidades que são subjacentes às funções matemáticas. Também Moss e Beatty (2006) salientam que as atividades com padrões oferecem um poderoso veículo para a compreensão das relações dependentes entre quantidades que são subjacentes às funções matemáticas, e acrescentam que são também uma forma concreta e transparente de os alunos começarem a entender as noções de abstração e generalização.

As sequências podem ser repetitivas ou crescentes. Numa sequência repetitiva há uma unidade (composta por diversos elementos ou termos) que se repete ciclicamente. As sequências crescentes são constituídas por elementos ou termos diferentes e cada termo na sequência depende do termo anterior e da sua posição na sequência (ordem do termo). As sequências crescentes podem ser constituídas por objetos (sequência pictórica) ou por números (sequências numéricas) (Ponte et al., 2009).

---

[2] Neste trabalho usa-se o termo "sequência" em vez de padrão (de acordo com a nomenclatura usada no PMEB (ME, 2007), como subtópico do tópico "Regularidades", nos 1.º e 2.º anos (p. 17) e nos 3.º e 4.º anos (p. 18), no que respeita ao 1.º Ciclo), mas respeita-se a terminologia original usada por cada um dos autores apresentados.
A respeito da utilização do termo "padrão", Pimentel e Vale (2012) referem que este pode ter o mesmo significado que regularidade. As autoras definem padrão ou regularidade como uma "relação discernível, apreendida de modo pessoal, num arranjo de qualquer natureza, através de um processo mental que pode ser partilhado, e que corresponde a uma estrutura traduzível por uma lei matemática" (p. 33). Relativamente ao termo sequência, as mesmas autoras referem que este indica "uma lista ordenada de objetos, números, etc. Ou seja, é uma correspondência estabelecida entre o conjunto dos números naturais ou um seu subconjunto finito e um conjunto de objetos, números, etc." (p. 30) e que "podemos ter uma sequência e não ter nenhum padrão" (p. 31). Neste trabalho consideram-se as sequências que têm subjacente uma regularidade ou padrão que traduz a sua estrutura, a qual pode ser expressa por uma lei matemática.

A exploração de sequências pictóricas permite a identificação de regularidades e a associação à sequência numérica que lhe está associada, no sentido de estabelecer generalizações. Essas generalizações, que resultam na formulação da lei geral da sequência, podem ser expressas por linguagem natural ou por modos mais formais. A progressiva formalização da expressão da generalização, incluindo a utilização da notação simbólica, contribui para a compreensão do sentido do símbolo e da linguagem algébrica e para a atribuição de significação à noção de variável.

A exploração do pensamento funcional a partir de sequências requer que os alunos coordenem as duas variáveis (dependente e independente), enquanto apenas uma é explicitamente representada. Neste sentido, Warren et al. (2011) consideram que o contexto de exploração dos padrões de crescimento pode ser restritivo e abstrato. A posição de cada termo como uma das variáveis não é transparente e os autores conjeturam que isso contribui para a utilização de estratégias de tentativa e erro e recursivas. Assim, na exploração de padrões, os alunos tendem a continuar o padrão em vez de se focarem no reconhecimento da relação entre os termos do padrão e a sua posição. Também Stephens et al. (2012) consideram que, muitas vezes, as atividades envolvendo padrões que se realizam nas salas de aula focam-se na variação simples da única variável que é observada.

Já em investigações anteriores, Warren (2005) tinha reconhecido que a exploração comum que ocorre em muitas salas de aula dos primeiros anos é limitadora, concentrando-se na continuação dos padrões, na identificação da parte que se repete ou cresce e na descoberta de elementos não visíveis. No caso dos alunos mais velhos, é-lhes solicitado que estabeleçam a relação funcional entre os termos dos padrões de crescimento e a sua posição, e usar essa generalização para criar outros termos para outras posições. Diversas investigações têm demonstrado que os adolescentes revelam dificuldades nessa transição. De acordo com a autora, essas dificuldades incluem a falta de uma linguagem apropriada necessária para descrever essas relações, a propensão para usar estratégias aditivas na descrição da generalização (isto é, focarem-se num único conjunto de dados) e a incapacidade de visualizar espacialmente o padrão completo.

Também Orton e Orton (1999) referem que encontrar outros termos de uma sequência não representados é, usualmente, uma das primeiras abordagens à álgebra, no entanto, a questão crítica é se os alunos conseguem encontrar a regra para o termo geral, ou seja, produzir a generalização. Carraher et al. (2008) também consideram que a dificuldade dos alunos na exploração dos padrões não se prende com a identificação da comunalidade entre alguns termos da sequência, mas na expressão de uma regra de generalização explícita.

Moss e McNab (2011) também referem a tendência de os alunos se focarem em estratégias aditivas para identificar e descrever padrões, ou seja, focarem-se na variação de apenas um conjunto de dados em vez de considerarem a relação entre os dois conjuntos de dados. Embora a estratégia recursiva permita aos alunos prever o termo seguinte de um padrão, não ajuda no estabelecimento de um pensamento covariacional que use a relação entre os conjuntos de dados para encontrar a subjacente regra da função.

No entanto, Warren (2005) sugere que é possível ultrapassar essa limitação na exploração dos padrões promovendo a visualização e a descrição dos padrões de crescimento em relação à sua posição relacional, ou seja, fazer a ponte entre o pensamento da variação simples e o pensamento funcional. De acordo com os resultados do seu estudo, a autora refere que há evidências suficientes que mostram não só que os alunos mais novos podem pensar funcionalmente como sugerem que há determinadas ações do professor que são promotoras desse tipo de pensamento. São exemplos dessas ações a utilização de material concreto para criar padrões, o questionamento específico para tornar explícita a relação entre o termo de uma sequência e a sua posição e o questionamento que ajude os alunos a alcançarem a generalização no que diz respeito às posições desconhecidas. Os resultados dos estudos de Warren (2005) mostram ainda que os alunos mais novos não só são capazes de pensar sobre as relações entre dois conjuntos de dados, como também são capazes de expressar essas relações de formas bastante abstratas.

Também Moss e McNab (2011) consideram que as dificuldades relativas à exploração dos padrões não residem nos padrões em si mesmos, mas na forma como são apresentados aos alunos. Assim, a abordagem de Moss e Beatty (2006) na exploração de padrões, com alunos do 2.º ano de escolaridade, inicialmente envolveu a construção pelos alunos de padrões pictóricos de crescimento, usando cartões de posicionamento (numéricos) e blocos padrão, como exemplificado na Figura 4.5. A incorporação da posição dos cartões serviu para ajudar os alunos a perceberem a relação funcional entre um conjunto de dados, representando a variável independente (neste caso, o número de posição representado pelos cartões numéricos) e o outro conjunto de dados, representando a variável dependente (neste caso, o número de blocos usados em cada posição).

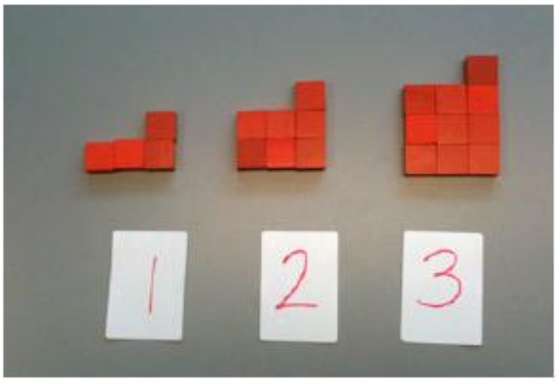


Figura 4.5 – Utilização de cartões numéricos para evidenciar o número de posição dos termos do padrão (Moss & McNab, 2011, p. 282).

Adicionalmente, a exploração dos padrões foi para além das típicas questões colocadas pelo professor de "o que vem a seguir?", centrando-se em questões que permitissem aceder à relação funcional. Mais especificamente, Moss e McNab (2011) referem que o tipo de questões colocadas pelo professor na exploração inicial de um padrão foram as seguintes: "Se o padrão continuar a crescer da mesma forma, qual será a aparência da próxima posição? Quantos blocos seriam necessários na próxima posição? Como seria a 10ª posição? E na posição 100ª?" (p. 281), ressaltando a focalização em tornar explícita a relação entre os termos do padrão e a sua ordem. Como resultado do seu estudo, os autores sugerem que, com a exploração apropriada, o estudo dos padrões pode ajudar os alunos a construírem o tipo de pensamento caraterizado como algébrico, permitindo a análise de relações entre quantidades, a apreensão da estrutura matemática, o estudo da variação e a generalização.

Vale (2009) refere que o trabalho com padrões em contextos figurativos permite, entre outros aspetos, o desenvolvimento da capacidade de generalização (próxima e distante) e proporciona oportunidades de argumentar e comunicar matematicamente. No âmbito do projeto *Matemática e padrões no ensino básico: perspetivas e experiências curriculares de alunos e professores*, a autora ilustra os resultados de uma intervenção didática baseada na resolução de tarefas de exploração de padrões em contextos visuais/figurativos realizada com alunos do 1.º ciclo do ensino básico. A autora conclui que os alunos deste nível de ensino exploraram a generalização a diferentes níveis e com representações variadas e trabalharam em simultâneo a aritmética e a álgebra. Em particular, Vale (2009) salienta o contexto figurativo e o suporte visual para a compreensão da estrutura do padrão, desenvolvendo uma flexibilidade visual que permitiu aos alunos não só optar pela estratégia mais adequada aos fins em vista, mas ao passar para as sequências, fazer uma generalização distante por palavras ou mesmo, em alguns casos, recorrendo a simbologia mais formal ou mesmo convencional da álgebra. A autora refere que, no estudo em análise, foi interessante ver que os alunos de diferentes anos de escolaridade foram gradualmente adotando as suas próprias estratégias para fazerem generalizações quer próximas quer distantes, mas sempre procurando fazê-lo de modo explícito, ou seja, com a preocupação em estabelecer uma relação entre o número de ordem da figura e o seu número de elementos, ou seja, entre as variáveis independente e dependente.

Santos (2008) desenvolveu uma investigação a partir da implementação de uma experiência de ensino com tarefas de exploração de padrões, com alunos do 5.º ano de escolaridade, com o objetivo principal de compreender o desenvolvimento de processos de generalização. Desse estudo, a autora concluiu que, no final da experiência de ensino, os alunos demonstraram ter começado a desenvolver aspetos importantes do raciocínio algébrico. Os alunos revelaram-se, ainda, aptos para generalizarem um padrão linear dado, descrevendo em termos gerais as propriedades das figuras e estabelecendo relações matemáticas, que progressivamente representavam de modo mais formal. A exploração dos padrões permitiu ainda que os alunos evoluíssem nas estratégias para efetuarem generalizações, partindo de estratégias próprias para estratégias mais intencionais, direcionadas e formais.

Barbosa (2010) realizou um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade, durante um ano letivo, com a implementação de tarefas de exploração de padrões em contexto visual. Como conclusões do seu estudo, a autora afirma que a exploração de padrões em contexto visual promove a emergência de múltiplas estratégias de generalização, potenciando o desenvolvimento de um raciocínio mais flexível. A emergência de múltiplas estratégias permite estabelecer conexões entre as relações aritméticas e geométricas, atribuir significado às regras formuladas e suscita a necessidade de formular e validar conjeturas. Para além disso, os resultados do estudo sugerem que quando os alunos limitam a exploração dos padrões ao plano numérico, as suas estratégias são menos adequadas do que quando têm uma abordagem visual, por esta permitir a atribuição de significado às variáveis manipuladas. Os padrões visuais poderão, desta forma, ser um contexto facilitador do raciocínio funcional. Barbosa (2013) apresenta como sugestão para o ensino a seleção de tarefas que favoreçam o uso de diferentes estratégias e que se promova "uma perspetiva dinâmica entre as possíveis abordagens, de modo a que os alunos consigam compreender e estabelecer paralelismos entre as estratégias visuais e numéricas" (p. 75).

Estratégias de generalização de sequências

Uma categorização de estratégias de generalização que tem sido usada como referência em problemas de generalização linear é a criada por Stacey (1989). A partir do estudo com alunos de idades compreendidas entre 9 e 13 anos, a autora classificou os métodos de resolução dos alunos em quatro tipos: *método de contagem*, consiste na contagem dos elementos da sequência a partir da representação pictórica até à ordem desejada; *método da diferença* consiste na identificação da diferença comum e na utilização dos múltiplos dessa diferença entre termos consecutivos; *método do objeto inteiro* consiste na utilização de um múltiplo de um dado termo da sequência para determinar termos de ordem superior. Este método aplica-se em problemas de proporcionalidade direta. Por último, o *método linear* que consiste em descobrir e usar um modelo do tipo "$an + b$".

Neste estudo, Stacey (1989) analisa também a consistência entre os métodos de resolução que os alunos usaram, comparando os métodos usados na *generalização próxima* com os métodos usados na *generalização distante*. Conclui que a maioria dos alunos usou o mesmo método (objeto inteiro, diferença e linear) que tinha usado na *generalização próxima* para a *generalização distante*. Verifica ainda que, no entanto, um em sete dos alunos que usou o método linear na *generalização próxima* trocou para o método da diferença na *generalização distante*, concluindo que esta inconsistência demonstra que os alunos não sujeitaram às suas resoluções um pensamento crítico. Por último, a autora conclui que os problemas de generalização linear são desafiadores para os diferentes níveis de ensino estudados e que as estratégias usadas são semelhantes nos alunos das diferentes idades, embora a proporção de alunos que escolhe determinado modelo varie.

Lannin, Barker e Townsend (2006) realizaram um estudo onde reportam as estratégias de generalização algébrica usadas por dois alunos do 5.º ano de escolaridade, identificando também os fatores que parecem ter influenciado a escolha dessas estratégias. O estudo inseriu-se numa metodologia de experiência de ensino, onde foram realizadas dezoito sessões de exploração de padrões que decorreram no espaço de quatro meses. Os resultados destacaram os seguintes fatores que influenciaram os alunos nas estratégias que usaram: a) valores de entrada (*input*), b) estrutura matemática da tarefa, c) estratégias anteriormente usadas pelos alunos, d) imagens visuais da situação apresentada, e e) interações sociais com o professor e com outros alunos.

O Quadro 4.2 revela a categorização das estratégias que foi usada pelos autores. Estes consideram estas estratégias como indicadoras de um crescente desenvolvimento, desde as estratégias recursivas às explícitas, onde as estratégias de objeto inteiro e de partição são consideradas tentativas para os alunos calcularem valores particulares no imediato.

Quadro 4.2 – Categorização das estratégias de generalização (Lannin, Barker & Townsend, 2006, p. 6).

Estratégia	**Descrição**
Explícita	A regra é construída de forma a permitir o cálculo imediato de qualquer valor de *output* dado um valor particular de *input*.
Objeto inteiro (*Unitising*)	Os alunos usam uma parte da unidade para construir uma parte maior da unidade usando múltiplos da unidade.
Partição (*Chunking*)	Os alunos usam um padrão recursivo para construir uma unidade para os valores pedidos.
Recursivo	Os alunos descrevem a relação que ocorre na situação entre valores consecutivos da variável independente.

Relativamente às estratégias recursivas, Lannin, Barker e Townsend (2006) referem que os valores de *input*, a estrutura matemática da tarefa e as estratégias anteriormente usadas foram identificados como fatores determinantes. Por exemplo, os dois alunos participantes no estudo usaram mais vezes a estratégia recursiva quando a tarefa tinha valores de *input* relativamente próximos e quando aparentavam ter uma forte imagem visual da situação apresentada.

Segundo estes autores, na estratégia do objeto inteiro, os valores de *input*, a estrutura matemática da tarefa, a imagem visual e as estratégias anteriores foram os fatores determinantes. Quando certas dimensões destes fatores coincidiam, os alunos escolhiam mais esta estratégia. Por exemplo, quando um valor de *input* particular era múltiplo do valor de *input* anteriormente usado e quando o aluno não aparentava ter uma forte imagem visual da situação apresentada, esta era a estratégia mais evidente. Também as estratégias anteriormente usadas desempenhavam um papel importante, pois quando tinham usado estratégias recursivas em situações anteriores, os alunos tendiam a procurar maior eficiência com a utilização da estratégia de objeto inteiro. Por outro lado, quando a estrutura da tarefa apresentava uma situação de decrescimento linear, os alunos não usavam esta estratégia, sendo usada apenas para situações de crescimento linear.

A estratégia de partição (*chunking*, no original) era influenciada também pelos valores de *input*, pela estrutura matemática da tarefa e pelas anteriores estratégias. Os alunos adotavam esta estratégia quando os valores de *input* eram relativamente próximos, a tarefa envolvia um decrescimento linear e quando tinham usado anteriormente estratégias recursivas.

4.3 Síntese

Considerando as tarefas de exploração dos pensamento relacional e funcional como contextos de promoção da generalização, importa caraterizar sumariamente cada um destes tipos de pensamento e evidenciar os seus aspetos principais.

O pensamento relacional diz respeito à capacidade de usar relacionalmente a aritmética de forma a fazer uso da estrutura subjacente das relações numéricas e das propriedades das operações e encarar a igualdade como uma relação de equivalência. Esta forma relacional de usar a aritmética permite que a análise não se centre exclusivamente nos cálculos e nas respostas numéricas, embora também fortaleça a flexibilidade de cálculo e de pensamento aritmético. Como referem Carpenter et al. (2003), o pensamento relacional é a capacidade de olhar para expressões ou equações na sua conceção mais ampla, revelando as relações existentes.

De entre os aspetos identificados como fundamentais para o desenvolvimento do pensamento relacional, realçam-se dois considerados cruciais e globalizantes da perspetiva relacional da aritmética: a conceção relacional do sinal de igual e a generalização de relações numéricas e das propriedades das operações. Embora estes dois aspetos se encontrem inter-relacionados, eles possuem características próprias que importa atender.

Relativamente à conceção relacional do sinal de igual, importa referir a natural tendência de os alunos se concentrarem na perspetiva operacional, entendendo o sinal de igual como indicador de uma resposta de cálculo. Para que a relação de igualdade seja entendida como uma relação de equivalência, é importante que os alunos aceitem as propriedades de simetria, reflexividade e transitividade. Isso implica, por exemplo, que os alunos devem reconhecer e aceitar expressões numéricas para além da forma $a + b = c$, amplamente usada na exploração da aritmética dos primeiros anos.

Relativamente ao trabalho em torno das propriedades dos números e das operações, considera-se a importância de produzir generalizações como fundamental para a ligação aritmética-álgebra. Estas generalizações das propriedades dos números e das operações podem partir da exploração de casos particulares, usados no sentido de quase-variáveis (Fujii, 2003). Esta perspetiva enquadra-se naquilo que Stephens (2006) refere como a capacidade de usar a variação entre os números de uma expressão numérica, considerando-se assim que esta variação aritmética permite a exploração de diversos casos particulares e, a partir daí, a identificação de uma comunalidade (que poderá ser uma propriedade de uma operação, por exemplo) e a expressão da generalização.

No que concerne ao pensamento funcional, ele atende a uma relação particular que tem subjacente a noção de função. Embora, ao nível do 1.º ciclo, este trabalho seja ainda muito informal e de preparação do conceito, há evidências empíricas diversas que mostram como os alunos mais novos conseguem aceder a formas de pensamento funcional já com algum grau de sofisticação.

A forma como os alunos percecionam as relações funcionais pode manifestar-se através da utilização de um pensamento recursivo, covariacional ou de correspondência, de acordo com Smith (2008). Como o pensamento recursivo apenas atende à variação de uma única variável, tem aplicabilidade limitada. O pensamento covariacional perceciona a variação de uma variável em relação com a variação da outra e, desta forma, envolve a análise das duas variáveis (dependente e independente). A forma mais sofisticada de entender as relações funcionais implica a perceção da correspondência entre as duas variáveis, descrevendo uma em função da outra.

Para além destas abordagens, Martinez e Brizuela (2006) e Tanish (2011) identificam ainda uma abordagem intermédia, designada por “híbrida” pelos primeiros autores. Esta abordagem engloba características de um pensamento recursivo e, em simultâneo, do pensamento funcional. Caracteriza-se pela descoberta de um padrão instrumental (Tanish, 2011) centrado na diferença entre os valores das variáveis dependente e independente, e resulta na construção de uma coluna intermédia numa tabela de função. Embora indique um progresso em relação a abordagens puramente recursivas, por reconhecer a relação entre as variáveis, esta abordagem é ainda dependente de uma estratégia recursiva, e por isso, é limitativa em termos de generalização.

Assinalam-se, neste trabalho, dois cenários possíveis (e não divergentes) para a exploração das relações funcionais. O primeiro diz respeito à utilização de problemas que suscitam a análise da relação da variação de quantidades e o segundo à exploração de sequências. Em ambos os cenários é importante evidenciar explicitamente as variáveis (dependente e independente) e suscitar nos alunos a identificação da relação entre elas, de forma a conduzir à sua generalização.

Capítulo 5 – Metodologia

Neste capítulo descrevo as opções metodológicas do estudo, o contexto, os participantes e os métodos e processos de recolha e análise dos dados. Estes aspetos são fundamentados nas referências teóricas consideradas pertinentes e nos propósitos do estudo enunciados.

O estudo enquadra-se numa perspetiva de *design research*[3] e adota uma metodologia de experiência de ensino. Estas opções metodológicas são justificadas e fundamentadas na primeira secção deste capítulo. A segunda secção descreve o contexto e os participantes no estudo. São apresentados os critérios de seleção dos participantes, uma caracterização dos mesmos e os diferentes papéis assumidos pelos intervenientes neste estudo. A terceira secção caracteriza o papel da investigadora enquanto professora-investigadora e justifica esta opção. A quarta secção apresenta os métodos de recolha de dados e fundamenta-os de acordo com os propósitos de desenvolvimento do estudo. A secção seguinte explicita os critérios de qualidade reconhecendo a sua pertinência para a validação do estudo. Os processos de recolha e análise dos dados realizados neste estudo são explicitados nas últimas duas secções deste capítulo.

5.1 Opções metodológicas

Este estudo insere-se numa perspetiva de *design research*, uma vez que tem como propósito principal compreender como se desenvolve a capacidade de generalização dos alunos de uma turma do 4.º ano de escolaridade, no decurso de uma experiência de ensino que foi sendo construída e realizada ao longo de um ano letivo, ancorada numa perspetiva de desenvolvimento do pensamento algébrico.

5.1.1 Design research

Nos anos noventa do século XX, surge uma nova metodologia, inicialmente denominada como *design experiments*, que pretendia testar e redefinir desenhos educacionais basea-

[3] Neste estudo optou-se pelo termo original, em inglês, *design research*. Considera-se ainda sinónimo dos termos *design experiments*, *design-based research* e *design studies* respeitando a denominação usada pelos diferentes autores (Bell, 2004; Cobb et al., 2003; Confrey, 2006; *Design-based Research Collective*, DBRC, 2003; Molina, Castro & Castro, 2007).

dos em princípios teóricos derivados de investigações anteriores (Collins, Joseph & Bielaczyc, 2004). Atualmente denominada como *design research*, esta metodologia foi desenvolvida dentro das Ciências da Aprendizagem (do inglês, *Learning Sciences*), um campo multidisciplinar que estuda o processo de ensino e aprendizagem e inclui, entre outros campos, a antropologia, a psicologia educativa, sociologia, neurociências, ciências da educação e educação matemática (Molina et al., 2007). É considerado por alguns autores (e. g. Bell, 2004; DBRC, 2003; Molina et al., 2007) como "um paradigma emergente para o estudo da aprendizagem em contexto através do estudo sistemático das estratégias e ferramentas de ensino" (DBRC, 2003, p. 5).

Cobb et al. (2003) referem-se a esta metodologia como *design experiments*, indicando que os mesmos são conduzidos para desenvolver teorias num domínio específico de aprendizagem, resultando idealmente numa maior compreensão da *ecologia de aprendizagem*. Ao referirem-se a ecologia de aprendizagem, os autores reconhecem o sistema de ensino-aprendizagem como complexo e interativo e os múltiplos elementos de diferentes tipos e níveis que estão envolvidos e que funcionam em conjunto para promover a aprendizagem. Esses elementos tipicamente incluem as tarefas ou problemas que são propostos aos alunos, o tipo de discurso que é encorajado, as normas de participação que são estabelecidas, as ferramentas ou outros materiais providenciados e os meios práticos pelos quais o professor na sala de aula pode orquestrar as relações entre esses elementos. Os autores usam a metáfora de ecologia para enfatizar que os contextos são conceptualizados como sistemas interativos em vez de coleções de atividades ou de uma listagem de fatores separados que influenciam a aprendizagem.

Molina et al. (2007) definem *design research* como um conjunto de abordagens metodológicas, nas quais o desenho do ensino e a investigação são interdependentes. Também Cobb, Gresalfi e Hodge (2009) referem essa interdependência entre o *design* da instrução e a investigação. Se, por um lado, o desenho de situações de aprendizagem serve como contexto para a investigação, por outro lado, a contínua análise e a análise final retrospetiva providencia informação para desenvolver e melhorar esse design (Cobb et al., 2009; Molina et al., 2007). De acordo com Molina et al. (2007), este paradigma tem por objetivo analisar a aprendizagem no seu contexto através do desenho e do estudo sistemático de formas particulares de aprendizagem, estratégias e ferramentas educativas, respeitando a natureza sistémica da aprendizagem, da educação e da avaliação. Ao *design* é reconhecido o potencial que promove a aprendizagem e cria conhecimento útil, e a produção de teorias sobre o progresso da aprendizagem e ensino em ambientes complexos (Cobb et al., 2003). Como referem Cobb et al.

(2009), dado a forte orientação pragmática deste tipo de metodologia, é importante enfatizar que a sua intenção é desenvolver, testar e redefinir teorias e não apenas verificar empiricamente o que funciona.

Tendo como objetivo geral uma maior compreensão dos contextos de aprendizagem, este tipo de investigação apoia-se em referências teóricas em educação e aprendizagem e reflete um compromisso com a compreensão das relações existentes entre a teoria educativa, a prática e os artefactos. O objetivo é produzir conhecimento suportado pela evidência da prática que guie a tomada de decisões para melhorar a aprendizagem dos alunos (Molina et al., 2007). Desta forma, a *design-based research* é uma importante metodologia para compreender como, quando e porque é que as inovações educacionais funcionam na prática (DBRC, 2003).

Neste sentido, Gravemeijer e van Eerde (2009) introduzem a designação de *teoria local de instrução*, referindo-se a uma teoria sobre o processo pelo qual os alunos aprendem determinado tópico matemático e sobre os meios que suportam esse processo de aprendizagem. O principal objetivo deste tipo de investigação é desenvolver uma teoria sobre o processo de aprendizagem que os alunos enfrentam em dado tópico matemático e sobre o que suporta esse processo de aprendizagem. Referindo-se a esta metodologia como *design studies*, também Confrey (2006) reconhece que esta procura atender à complexidade da prática de sala de aula e providenciar o tipo de *insights* necessários para ajudar o professor a realizar a sua tarefa desafiadora.

Bell (2004) refere que esta ligação entre investigação e prática se enquadra perfeitamente no propósito da educação dada a sua natureza intervencionista. Neste sentido, reconhece que é difícil imaginar a evolução da prática e da teoria sem que as investigações empíricas se realizem nos contextos naturais e a redefinição do conhecimento teórico se centre no ensino e na aprendizagem. Assim, o foco do *design-based research* está intencionalmente relacionado com a investigação empírica e com a teorização sobre o que acontece nesses contextos autênticos. Este autor refere, assim, que uma característica central do *design-based research* é que se foca no desenvolvimento de inovações sustentadas em educação. Reconhece a pertinência desta perspetiva, pois, a maioria dos investigadores em educação não adota uma postura fortemente intervencionista e transformadora, seja por escolha pessoal ou por constrangimentos metodológicos.

Os autores do DBRC (2003) reafirmam o valor desta metodologia, relevando a sua potencialidade para produzir práticas educativas inovadoras. Desta forma, identificam quatro áreas onde este *design* se torna mais promissor: a) explorar possibilidades de criar novos ambientes de aprendizagem e ensino, b) desenvolver teorias de aprendizagem e ensino que sejam baseadas no contexto, c) avançar e consolidar o conhecimento do *design* e d) aumentar a capacidade de inovação educacional.

Inspirando-se em diversos autores, Molina et al. (2007) sintetizam as características dos *design studies* da seguinte forma:

1. São centrados na caracterização da situação de ensino-aprendizagem em toda a sua complexidade, a maior parte da qual não é conhecida inicialmente. As salas de aula ou ambientes de ensino e aprendizagem são consideradas complexas e condicionais, implicando a necessidade de um conjunto amplo de medidas para capturar o processo de aprendizagem, assim como o estado cognitivo final dos alunos. Estes estudos envolvem múltiplas variáveis, muitas das quais não podem ser controladas (Collins, Joseph & Bielaczyc, 2004).
2. Normalmente envolvem diferentes tipos de participantes, sendo necessário que a pessoa que atua como professor esteja completamente envolvida no processo de investigação.
3. Ocorrem nos contextos de vida real onde normalmente acontece a aprendizagem. Desta forma, o tipo de situações consideradas é bastante variado: uma equipa de investigadores a trabalhar com um pequeno grupo de alunos; um grupo de investigadores, formadores de professores e professores que em conjunto promovem o desenvolvimento de uma comunidade profissional; uma equipa de investigadores que colabora com professores e outros agentes educativos em estudos que envolvam várias escolas (Cobb et al., 2003), etc.. A multiplicidade de contextos nos quais estes estudos acontecem e o tipo de pessoas que podem envolver são alguns dos fatores que dão origem a diversos tipos de *design studies*.
4. As teorias desenvolvidas no âmbito dos *design studies* são humildes porque são específicas de um domínio de aprendizagem e, assim, têm um alcance teórico intermédio (Cobb et al, 2003).
5. São caraterizados por um progressivo refinamento dado que o *design* é constantemente revisitado para considerar as evidências obtidas ao longo do processo (Collins et al., 2004). Ciclos contínuos de *design*, de aplicação do *design* (intervenção), análise de dados e *re-design* são realizados. Os investigadores que usam esta metodologia testam e redefinem conjeturas sobre a trajetória de aprendizagem considerando as evidências obtidas. Eles colaboram ou atuam como professores e

reúnem extensivos registos sobre o que os alunos, os professores e os investigadores aprenderam durante o processo.

6. Os *design studies* incluem dois tipos de análise de dados: uma análise preliminar que é realizada depois de cada ciclo do processo de investigação e uma análise final retrospetiva que envolve todos os dados obtidos ao longo do processo de recolha de dados.

Também Cobb et al. (2003) procuram identificar os aspetos que são comuns aos diversos tipos de *design experiments*, apontando cinco características principais. A primeira prende-se com o propósito geral de desenvolver teoria sobre o processo e os meios que suportam a aprendizagem. A segunda relaciona-se com a natureza intervencionista desta metodologia, fortemente *design experiments* ligada à inovação educativa. A terceira característica, construída a partir das duas anteriores, refere-se às facetas prospetiva e reflexiva desta metodologia. A faceta prospetiva diz respeito às conjeturas que projetam o processo e os meios de suporte da aprendizagem e a faceta reflexiva testa continuamente essas conjeturas, reformulando-as durante a condução do estudo. Juntas, estas duas facetas, fazem emergir a quarta característica: carácter interativo dos *design experiments*. O processo de produção, reformulação ou refutação de conjeturas é realizado através de um “ciclo de invenção e revisão” (Cobb et al., 2003, p. 10). A quinta e última característica identificada pelos autores reflete as raízes pragmáticas da metodologia, onde as teorias desenvolvidas durante o processo de experimentação são humildes e aplicáveis, ou seja, dizem respeito a um domínio específico do processo de aprendizagem e são filtradas pelo seu efeito instrumental. De uma forma resumida, Cobb et al. (2003) referem que a metodologia de *design experiments* é interativa, intervencionista e orientada pela teoria. Também diSessa e Cobb (2004) classificam os *design experiments* como interativos, situados e tentativas baseadas na teoria para simultaneamente compreender e melhorar o processo de ensino-aprendizagem.

Identificado como um tipo especial de *design research* (Molina et al., 2007), surge a metodologia de experiência de ensino adotada neste estudo. Uma experiência de ensino consiste numa sequência de episódios de ensino nos quais os participantes são, normalmente, um professor-investigador e um ou mais alunos (Steffe & Thompson, 2000). É considerada por Steffe e Thompson (2000) como uma ferramenta exploratória que é diretamente direcionada para compreender o progresso dos alunos durante um determinado período de tempo. Em seguida, carateriza-se este tipo de metodologia.

5.1.2 Experiência de ensino

O *design* deste estudo enquadra-se no que Gravemeijer e Cobb (2006) denominam como "experiência de ensino em sala de aula", que agrega o desenvolvimento de processos de planeamento e ensino, assim como a investigação sobre a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos num contexto social, a sala de aula, e deste modo, procura ser, simultaneamente, educativa e científica (Kelly, 2003). A experiência de ensino desenvolveu-se de acordo com três fases: diagnóstico da situação de partida e desenho da experiência de ensino numa primeira fase, implementação da experiência de ensino na sala de aula na segunda fase, e, na terceira fase, avaliação da experiência de ensino. No entanto, a análise das atividades de ensino foi contínua e acompanhou a realização da experiência de ensino (Gravemeijer & Cobb, 2006), sendo usada tanto para reavaliar e desenhar as tarefas matemáticas, como para traçar o percurso de aprendizagem dos alunos.

Uma experiência de ensino integra uma sequência de episódios de ensino que incluem, entre outros elementos, um professor e um ou mais alunos, e um método de recolha de dados que incide sobre esses episódios (Steffe & Thompson, 2000), que visa a compreensão dos processos de ensino e aprendizagem, e em que o investigador está envolvido como educador (Kelly, 2003). Deste modo, uma característica distintiva deste tipo de abordagem é a rutura com a diferenciação entre professor e investigador (Molina, 2006), sendo que em muitos casos o investigador assume o papel de professor, tal como sucedeu no presente estudo.

Para Confrey e Lachance (2000), uma experiência de ensino é guiada por uma conjetura, ou seja, uma inferência baseada em evidências inconclusivas ou incompletas. A conjetura é uma forma de reconceptualizar os modos de abordagem, tanto do conteúdo como da pedagogia, de um conjunto de tópicos matemáticos. Ao contrário de uma hipótese formal numa abordagem de design experimental, uma conjetura não é uma asserção à espera de ser provada ou refutada. Confrey e Lachance (2000) distinguem as investigações guiadas por hipóteses das investigações guiadas por conjeturas. Assim, enquanto nas primeiras, os investigadores tentam descobrir se a intervenção resultou ou não ou se a teoria foi confirmada ou não, nas segundas, os investigadores pretendem revisitar e re-elaborar a conjetura enquanto a investigação está em progresso. Desta forma, enquanto uma hipótese permanece estática ao longo da experiência, uma conjetura evolui à medida que a investigação se desenvolve.

Estes autores referem que as conjeturas têm duas dimensões significativas: a dimensão do conteúdo matemático e a dimensão pedagógica. A primeira diz respeito à componente matemática e responde à questão: "o que deve ser ensinado?". A segunda, relacionada com a primeira, corresponde à dimensão pedagógica e responde à questão: "como deve ser ensinado esse conteúdo?". Esta segunda dimensão conduz o investigador à forma como a sala de aula deve ser organizada para o ensino e que tipos de tarefas, atividades e recursos devem ser providenciados para o conteúdo considerado (Confrey & Lachance, 2000).

Neste estudo adotaram-se ambas as dimensões das conjeturas identificadas por Confrey e Lachance (2000), como se explica mais pormenorizadamente no capítulo seguinte. A conjetura do conteúdo matemático baseou-se na teoria relevante sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade. Desta forma, adotou-se a definição de pensamento algébrico apresentada por Blanton e Kaput (2005) e centrou-se o estudo no desenvolvimento da generalização e da sua representação e na promoção dos contextos de pensamento relacional e pensamento funcional. Relativamente à conjetura de dimensão pedagógica adotou-se o modelo de ensino exploratório para a exploração das tarefas matemáticas.

Com a mesma conceção de conjetura apresentada por Confrey e Lachance (2000) e, embora não distinguindo entre conjetura e hipótese, Steffe e Thompson, (2000) sugerem que, numa experiência de ensino, o processo de formulação de hipóteses, testagem experimental e reconstrução das hipóteses forma um ciclo recursivo. O investigador pode começar por uma hipótese, um modelo preliminar, construído a partir das suas assunções conceptuais e experiência anterior. No entanto, o que os alunos dizem ou fazem no contexto da interação com os investigadores é uma fonte de dados para potenciais inferências sobre as operações conceptuais dos alunos. Inicialmente essas inferências podem ser vagas e, muitas vezes, sugerirem futuras experimentações que podem ajudar a torná-las mais explícitas e mais precisas. Algumas hipóteses ou conjeturas podem ser reformuladas ou abandonadas depois da análise de um ou vários episódios de ensino. Desta forma, os investigadores precisam de reconhecer continuamente o significado subjacente da linguagem e das ações dos alunos, sendo neste sentido que Steffe e Thompson (2000) referem que "os alunos guiam os investigadores" (p. 277).

5.1.3 Contexto e participantes

Para a realização do presente estudo foi necessário selecionar o ano de escolaridade para a implementação de uma experiência de ensino centrada no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Tendo em conta os recentes resultados apresentados por diversos estudos empíricos internacionais, a introdução desta temática no PMEB (ME, 2007) e a minha atividade docente no primeiro ciclo do ensino básico, este foi escolhido como o nível de ensino para a implementação do estudo. Posteriormente, foi selecionado o 4.º ano de escolaridade porque permitia a articulação curricular pretendida com o pensamento algébrico e por, nesta fase da escolarização, os alunos já possuírem conhecimentos no domínio dos Números e Operações que poderiam possibilitar um maior aprofundamento das ideias matemáticas que se pretendiam explorar na experiência de ensino. Por uma questão de facilidade logística, quer de acesso ao terreno quer para realização da experiência de ensino, foi selecionado o agrupamento de escolas no qual eu me encontrava a lecionar. Para além das questões práticas que considero pertinentes ter em conta pela exigência desta metodologia de investigação, o agrupamento de escolas tinha começado a implementar o PMEB (ME, 2007) desde o ano letivo anterior, permitindo que a turma de 4.º ano que fosse escolhida já tivesse trabalhado com o referido programa nesse ano letivo. Enquadrado nesse processo de implementação do novo programa, os professores do 1.º e 3.º anos tinham frequentado sessões de acompanhamento durante todo o ano letivo de 2009/10. Essas sessões foram dinamizadas por mim e ocorriam com uma periodicidade quinzenal.

O agrupamento de escolas é constituído por duas escolas de pré-escolar e 1.º Ciclo, uma escola apenas com 1.º ciclo, uma escola com 2.º e 3.º ciclos e uma escola secundária, que é a sede do agrupamento. Situa-se numa zona urbana, num concelho da margem sul do rio Tejo. A escola do 1.º ciclo onde realizei o estudo tem uma construção recente e moderna, com espaços de sala de aula amplos e com recursos ao nível de materiais estruturados na área de Matemática e alguns recursos tecnológicos, como vídeo-projetor e retroprojetor. A zona envolvente à escola é relativamente recente e cuidada, constituída por prédios baixos e vivendas. A população é constituída, maioritariamente, por casais jovens, de classe média. A maior parte dos alunos reside nas imediações da escola.

Inicialmente, foram consideradas todas as turmas do 4.º ano do agrupamento como possibilidade para a escolha dos participantes do estudo e os respetivos professores. No entanto, para a seleção da turma participante, o critério principal prendeu-se com a escolha de um(a) professor(a) que mostrasse interesse e disponibilidade para participar num estudo desta natureza. Tendo consciência da exigência ao nível da disponibilidade que a participação requeria, procurei selecionar um docente que não apresentasse grandes condicionantes de tempo e que se disponibilizasse a permitir que a sua turma fosse objeto desta intervenção. De entre os docentes considerei aqueles que poderiam ter interesse em aprofundar conhecimentos sobre o ensino da matemática e em experimentar metodologias de ensino condicentes com os propósitos do estudo, nomeadamente ao nível da implementação do ensino de natureza exploratória, e consequentemente considerei a professora Susana como uma possibilidade de escolha. Em setembro de 2010 fiz o convite à professora Susana que, de imediato, aceitou participar neste projeto, mostrando interesse em aprender e não apresentando quaisquer condicionantes, no respeitante ao tempo e disponibilidade necessários.

A professora Susana possui licenciatura em ensino do 1.º Ciclo e tem cerca de quatro anos de serviço. É uma professora nova e interessada pelo ensino, que mostra uma boa atitude profissional, sendo empenhada e dedicada e mantendo uma boa relação com os colegas. Lecionava a turma desde o 3.º ano de escolaridade, tendo uma relação bastante estreita e afável com os alunos. Devido à natureza intervencionista desta abordagem metodológica, a forma como a professora permitiu que a sua turma participasse sem restrições foi um dos fatores que permitiu que a implementação decorresse com normalidade e que os resultados fossem alcançados.

Selecionada a professora e, desta forma, a turma, foi necessário proceder ao pedido de autorizações aos encarregados de educação e ao diretor do agrupamento de escolas (Anexo 1). Os encarregados de educação foram informados pela professora Susana, em situação de reunião ordinária. Mostraram-se bastante interessados, confiando na indicação da professora de como a participação neste estudo seria enriquecedora para os alunos. Acederam, desta forma, à realização do estudo, tal como o diretor do agrupamento de escolas. Nessa autorização estava explícito o recurso à gravação de todas as aulas em registo áudio e vídeo e à utilização de entrevistas clínicas a alguns alunos. Estava ainda assegurada a utilização exclusiva dos dados no âmbito do estudo.

A turma

A turma, inicialmente constituída por 20 alunos, foi reduzida a 19 no final do 1.º período devido à transferência de um aluno. Os alunos têm uma média de nove anos de idade e são 12 rapazes e sete raparigas. Dezoito alunos encontram-se a frequentar o 4.º ano pela primeira vez e um aluno pela segunda. Todos os alunos são de nacionalidade portuguesa, à exceção de uma aluna brasileira.

Na turma existe um aluno com necessidades educativas especiais, abrangido pelo decreto-lei n.º 3/2008. Apresenta paralisia cerebral caraterizada por tetraparésia e com comprometimento ao nível da comunicação oral. Devido à sua problemática e, mais especificamente, à impossibilidade de expressar-se oralmente, este aluno não é um participante direto do estudo, embora tenha participado na exploração, em grupo, de algumas tarefas. Em muitas das aulas lecionadas durante a experiência de ensino, este aluno tinha um trabalho diferenciado de apoio com a docente de ensino especial.

São, assim, 18 os alunos participantes neste estudo.

Os alunos, na sua maioria, mantêm-se juntos desde o primeiro ano de escolaridade, tendo havido a integração de poucos alunos ao longo dos anos. Todos os alunos aparentam estar perfeitamente integrados no ambiente da turma. A professora Susana menciona no Projeto Curricular de Turma que a turma é "estável, assídua, pontual e interessada", no entanto, considera também que é agitada e conversadora e que a generalidade dos alunos revela boas capacidades de aprendizagem. Refere ainda que a turma mantém boas relações interpessoais.

No geral, e na opinião da professora Susana, a turma revela desempenhos positivos na área de matemática, com exceção de quatro alunos por apresentarem algumas dificuldades de aprendizagem em todas as áreas, nomeadamente ao nível das capacidades de atenção e concentração. Destaca seis alunos com desempenhos muito bons nesta área.

Nas aulas de matemática, habitualmente, a professora incentiva os alunos a explicarem as suas estratégias de resolução, especialmente nas tarefas de resolução de problemas. O ambiente de sala de aula promovido pela professora é acolhedor, onde os alunos se sentem à vontade para partilhar diferentes formas de resolução, embora tenha também, em alguns momentos, características de um ensino mais expositivo.

A temática de desenvolvimento do pensamento algébrico não tinha sido ainda formalmente trabalhada na turma, à exceção da procura de algumas regularidades numéricas, mas de forma pouco consistente. A exploração do pensamento algébrico tendo em vista o desenvolvimento da generalização e a sua representação e de acordo com os contextos de pensamento relacional e funcional, não tinha sido, até ao momento da implementação da experiência de ensino, intencionalmente ensinada pela professora titular de turma, o que não constituía obstáculo ao desenvolvimento da experiência de ensino.

Enquanto professora do mesmo agrupamento e da mesma escola, os alunos da turma já estavam familiarizados com a minha pessoa e presença. Para além de docente com turma atribuída no ano letivo anterior, também desempenhei funções de coordenação do Projeto Eco-Escolas durante alguns anos naquela escola. Esse projeto implicava um contacto direto com todos os alunos da escola e a minha presença nas salas de aula era habitual, mesmo que somente durante alguns minutos no âmbito das atividades do projeto. Para além disso, também dinamizei durante o ano letivo algumas atividades pontuais mais estruturadas com todas as turmas da escola. Desta forma, os alunos conheciam-me como docente daquela escola e a minha integração nas aulas da turma participante durante a implementação da experiência de ensino foi por eles encarada com naturalidade.

5.2 O papel da investigadora

Como já foi referido, uma característica distintiva de uma abordagem metodológica de experiência de ensino é a rutura com a diferenciação entre professor e investigador (Molina, 2006). De facto, o investigador atua como professor para interpretar a linguagem e ações dos alunos durante a comunicação interativa e para poder tomar decisões durante os episódios de ensino que ajudem a promover a aprendizagem (Steffe, 1991).

Por outro lado, Confrey e Lachance (2000) referem que quem assumir o papel de professor na condução de uma experiência de ensino deverá estar plenamente integrado na investigação, familiarizado com a conjetura e ser parte integrante da equipa nas diferentes fases de análise dos dados. Estes autores reconhecem que esta envolvência total poderá ser de difícil concretização por parte de um professor titular de turma, pois acarreta um substancial compromisso de tempo e energia. Devido a estes constrangimentos, Confrey e Lachance (2000) sugerem que um membro da equipa de investigação atue como professor durante a intervenção.

De facto, no estudo que se apresenta, esses constrangimentos foram sentidos. Embora, no início da experiência de ensino, a professora titular de turma tenha mantido a lecionação das aulas com as tarefas propostas, foi feita gradualmente uma mudança de papéis e assumida por mim a condução das aulas. Assim, na primeira sequência de tarefas, a professora Susana ministrou as aulas, reunindo previamente comigo para a preparação das mesmas. No entanto, ao longo da implementação dessa sequência de tarefas, a exigência, tanto ao nível do conteúdo matemático como ao nível da condução pedagógica, foi-se acentuando e, de uma forma muito natural, a minha intervenção em sala de aula foi-se intensificando. Embora tenha assumido intervenções como professora coadjuvante desde o início da experiência de ensino, a minha intervenção foi sendo cada vez mais visível até à troca de papéis com a professora Susana. No início da segunda sequência de tarefas, era eu quem ministrava as aulas e a professora Susana assumia o papel de coadjuvante. Esta mudança de papéis foi aceite muito naturalmente pelos alunos.

Muitos autores do design research (Confrey & Lachance, 2000; Steffe & Thompson, 2000) referem-se ao papel do investigador quando este assume o ensino como professor-investigador. De acordo com Steffe e Thompson (2000) a postura que o professor-investigador deve assumir na condução da experiência de ensino é bastante exigente e, mesmo investigadores muito experientes podem não sentir-se preparados para a imprevisibilidade das reações dos alunos no decurso dos episódios de ensino. Estes autores referem que, inicialmente, os professores-investigadores envolvem-se em interações intuitivas com os alunos e que, à medida que a experiência de ensino progride, essas ações tornam-se mais analíticas. Estas ações intuitivas iniciais são, muitas vezes, pouco explícitas das razões de como e porque é que ocorrem, acontecendo sem grande planificação da ação. Ao interagir com os alunos, o professor-investigador procura criar um ambiente de harmonia, motivando os alunos a explicarem os seus raciocínios e ouvindo-os atentamente. De facto, Confrey e Lachance (2000) referem mesmo que o papel de ouvinte é uma das maiores responsabilidades neste tipo de metodologia. À medida que as ações do professor-investigador se tornam mais analíticas, elas permitem um maior confronto com as conjeturas formuladas inicialmente. Assim, e tendo como foco o raciocínio dos alunos, as ações mais analíticas do professor-investigador frequentemente seguem os *insights* das operações mentais que os alunos expressam através da linguagem e das ações (Steffe & Thompson, 2000).

Steffe e Thompson (2000) referem que as ações do professor ocorrem no contexto de interação com os alunos e que essa interação não pode ser totalmente preparada, antecipada. Adicionalmente, referem que aprender a interagir com os alunos é uma questão central de qualquer experiência de ensino. Por muito que o investigador tenha formulado hipóteses de investigação para testar no início da experiência de ensino, mesmo investigadores experientes podem não conseguir antecipar suficientemente bem o progresso que os alunos podem fazer ou o pensamento matemático que pode ser revelado por eles. Estes autores referem mesmo que, se os investigadores já conseguem prever antes da interação com os alunos quais os resultados que vão obter, então, existirão poucas razões para conduzir uma experiência de ensino.

A dificuldade do duplo papel de professor-investigador exige que este se coloque, em simultâneo, dentro da interação e fora dela (Steffe & Thompson, 2000). De acordo com Confrey e Lachance (2000), a adoção do papel de professor-investigador acarreta um conjunto de atitudes relacionadas com o facto de ter de dominar o conteúdo especifico, mas também de ser um ouvinte, um facilitador, um dinamizador das discussões e um avaliador.

5.3 Métodos de recolha de dados

De acordo com Molina et al. (2007) a recolha de dados numa experiência de ensino é exaustiva de modo a conseguir capturar com precisão as interações de sala de aula, o desempenho e a evolução dos alunos. Desta forma, múltiplos métodos de recolha de dados são usados. Os métodos mais usuais para a recolha de dados na investigação qualitativa são a observação, as entrevistas e a utilização de documentos, por serem aqueles que mais facilmente conseguem responder às questões colocadas por estes estudos (Merrian, 2002).

Os métodos de recolha de dados usados neste estudo foram a observação participante com gravação áudio e vídeo, a recolha documental e entrevistas clínicas a alguns alunos da turma.

5.3.1 Observação

O objetivo da observação na investigação qualitativa é ter acesso ao significado e interpretação das ações, fenómenos ou feitos que não se expressam só oralmente, e atrás dos quais se escondem códigos de organização de conduta e interpretações que dão sentido ao mundo das pessoas (Marcelo et al., 1991). A observação é deliberada, com algum grau de sistematização e orientada de acordo com fins ou metas. Atua como uma "lente" que representa a realidade (Marcelo et al., 1991).

Cohen, Manion e Morrison (2007) referem que a observação em investigação oferece ao investigador uma oportunidade para recolher os *dados vivos* que ocorrem naturalmente nas situações sociais. Desta forma, segundo estes autores, o investigador pode olhar diretamente ao que acontece *in loco*, pois "o que as pessoas fazem é diferente daquilo que dizem que fazem" (p. 396). Por outro lado, também quem observa condiciona aquilo que refere ter observado pela sua interpretação e julgamento subjetivos. Assim, a observação como método de recolha de dados é sensível aos contextos e à subjetividade do observador.

Neste sentido, Pourtois e Desmet (1992) referem que, nos estudos qualitativos, essa subjetividade é tida em conta e é analisada. Desta forma, a observação tenta articular os dados resultantes da análise objetiva com os que provém da apreciação subjetiva com o objetivo de proporcionar uma visão, o mais completa possível, da realidade e da sua complexidade. Para que isso aconteça, estes autores referem que é importante que os dados resultantes da observação sejam complementados com outras técnicas como a entrevista e a análise de documentos, e que seja feita a triangulação entre os dados.

Cohen et al. (2007) consideram como participante qualquer forma de observação, pois referem que não se pode estudar o mundo sem fazer parte dele. No entanto, a forma como o observador participa na ação que observa conduz a diferentes tipos de observação. Num dos extremos pode estar a participação completa, considerando-se o investigador um *participante-como-observador* (*participant-as-observer*, no original), e, no outro extremo, um maior distanciamento no caso do investigador como *observador-como-participante* (*observer-as-participant*, no original). A diferenciação é entre a participação completa ou um maior distanciamento nessa participação, sendo que, no primeiro caso, o investigador é parte integrante da ação que observa (Cohen et al., 2007).

O participante-como-observador faz parte da vida social dos participantes e documenta e regista o que acontece para os propósitos da investigação (Cohen et al., 2007). Este tipo de observador permanece, pois, no local do estudo durante um considerável período de tempo, registando o que acontece e assumindo um papel na situação. Essa permanência demorada no local do estudo permite ao investigador observar como os eventos evoluem ao longo do tempo, capturando a dinâmica das situações, das pessoas, as personalidades, os contextos, fontes, papéis, etc. Morrison (1993, citado em Cohen et al., 2007) considera que o facto de o investigador estar imerso num contexto particular ao longo de um determinado tempo permite não só aceder e evidenciar características da situação que se tornam emergentes, como a evidência de uma perspetiva mais holística da inter-relação entre os fatores envolvidos na situação. Tal imersão facilita a existência de descrições densas, particularmente sobre os processos e interações sociais, que conduzem a explicações e interpretações precisas sobre os eventos, "carregadas" de realidade e que ajudam a reduzir a subjetividade das inferências feitas pelo investigador (Cohen et al., 2007).

Neste estudo, a investigadora, inicialmente, assumiu-se como *observadora-como-participante* e, progressivamente, assumiu o papel de *participante-como-observadora*. O primeiro papel assumido pela investigadora permitiu a entrada no terreno através da coadjuvação à professora titular de turma nos momentos de trabalho autónomo dos alunos. À medida que a investigadora foi assumindo a condução das aulas da experiência de ensino, foi apropriando o papel de *participante-como-observadora*.

O tipo de observação descrito é, muitas vezes, combinado com outras formas de registo de dados. Neste estudo utilizou-se, em simultâneo, a gravação áudio e vídeo durante todos os episódios da experiência de ensino.

A utilização de gravações áudio e vídeo é considerada por Herbst e Chazan (2009) como uma ferramenta importante para captar a ação que acontece em sala de aula. Também Confrey e Lachance (2000) consideram que a gravação vídeo é um dos métodos mais poderosos de recolha de dados por conseguir capturar as interações diárias de sala de aula. Como aos educadores matemáticos não interessa apenas os resultados da atividade de sala de aula, mas também a atividade em si mesma (ou seja, o que acontece realmente na sala de aula), e como as interações em sala de aula acontecem ininterruptamente, de forma multimodal (com gestos, discurso, postura e movimentos corporais) e rápida; os métodos e técnicas de recolha de dados têm de ser apropriadas para captar essa imensidão de aspetos (Herbst & Chazan, 2009). As gravações vídeo podem também ser fundamentais no processo de análise dos dados por permitirem parar e rever a ação o número de vezes considerado necessário para a sua interpretação. Neste sentido, Clement (2000) refere que a gravação vídeo pode ser um instrumento importante pela sua flexibilidade em recolher e guardar informação que captura a riqueza do comportamento e a complexidade de interações e permite aos investigadores reexaminar os dados as vezes que forem necessárias. No entanto, esses meios recolhem parcialmente a ação que acontece na sala de aula. As gravações vídeo capturam apenas os eventos visíveis e para os quais a câmara está direcionada e as gravações áudio capturam apenas o discurso audível e que está mais próximo do microfone. Apesar dessas limitações, as gravações áudio e vídeo conseguem capturar uma grande parte da comunicação multimodal que acontece em sala de aula respeitando a sua complexidade (Herbst & Chazan, 2009), e por isso podem ser uma poderosa ferramenta de complemento à observação direta das situações educativas.

Há autores (e.g. Merriam, 1991) que referem algum constrangimento provocado pela utilização da gravação vídeo, considerando que pode ser um facto de perturbação à normalidade da realidade de sala de aula. Tendo em conta este aspeto e para permitir uma maior familiaridade dos alunos com esse procedimento de recolha de dados, antes da implementação da experiência de ensino foram gravadas algumas aulas na turma.

5.3.2 Recolha documental

A utilização de documentos como forma de recolha de dados na investigação qualitativa é considerada por Yin (1989) como uma fonte: i) estável, por permitir ser revisitada inúmeras vezes; ii) discreta, por não interferir na normalidade da situação em investigação; iii) exata, por conter nomes, referências e detalhes exatos de um evento; e iv) de ampla cobertura por poder cobrir longos períodos de tempo, muitos eventos e ambientes distintos.

Considerado por Merrian (2002) como a terceira fonte de dados mais usual nos estudos qualitativos, os documentos usados podem ser escritos, visuais (como fotografias) ou artefactos culturais. De acordo com esta autora, o que fortalece a utilização de documentos como fonte de dados é o facto de existirem naturalmente e não serem intrusos nessas situações. No presente estudo, embora os documentos utilizados (fichas de trabalho) tenham sido preparados pela investigadora, eles faziam parte da exploração natural das tarefas. É a partir do conteúdo das resoluções dos alunos nas tarefas matemáticas propostas que se realiza o primeiro nível de análise deste estudo.

5.3.3 Entrevistas clínicas

Yin (1989) considera que as entrevistas são uma das mais importantes fontes de informação num estudo qualitativo. Considerando a palavra entrevista, Cohen et al. (2007) chamam a atenção para a sua decomposição em entre-vista, ou seja, um intercâmbio de pontos de vista entre duas ou mais pessoas sobre um assunto de mútuo interesse. Estes autores reconhecem, assim, a centralidade da interação humana para a produção de conhecimento e enfatizam a contextualização social na investigação dos dados. Desta forma, reconhecendo o conhecimento como uma construção entre os participantes, consideram que os dados são gerados e não captados. Deste ponto de vista, uma entrevista não pode ser considerada subjetiva ou objetiva, mas antes intersubjetiva. As entrevistas envolvem os participantes – tanto os entrevistadores como os entrevistados – numa discussão sobre as suas interpretações do mundo onde vivem e a expressarem-se como percecionam as situações do seu ponto de vista. Neste sentido, uma entrevista não é relativa apenas à recolha de dados sobre a vida, é, em si mesma, uma parte da vida (Cohen et al., 2007). Considerando o contexto educativo onde se realizaram as entrevistas deste estudo, de facto, as entrevistas foram também espaço de resolução e discussão de tarefas matemáticas, sendo também ambientes de aprendizagem.

Numa entrevista usam-se múltiplos canais sensoriais, como os verbais, não verbais e auditivos. Ao contrário de uma conversa rotineira, uma entrevista tem um propósito específico. No caso concreto deste estudo, as entrevistas foram aplicadas após a resolução do teste de diagnóstico e tinham como propósito principal compreender a forma como os alunos entrevistados tinham resolvido as questões propostas e aceder à sua capacidade de raciocinar sobre questões que envolviam a generalização.

Como os entrevistados neste estudo foram alguns dos alunos de 4.º ano da turma participante, é importante atender ao que referem Cohen et al. (2007) sobre entrevistas com crianças. Estes autores referem que, sendo o seu desenvolvimento cognitivo e linguístico, a sua capacidade de atenção e concentração, etc., diferentes dos adultos; é importante compreender o mundo da criança através dos seus olhos e não usar as lentes do adulto. Para além disso, é importante tratar a criança com verdade, ajudando-a a sentir-se confiante e tornar a entrevista agradável, assegurando-se que percebe as questões que lhe são colocadas, dando-lhe tempo para pensar e construir a sua resposta.

Neste sentido, e referindo-se às entrevistas em geral, Bodgan e Biklen (1994) consideram que as boas entrevistas caracterizam-se pelo facto de os participantes estarem à vontade e falarem livremente sobre os seus pontos de vista. Um bom entrevistador comunica ao entrevistado o seu interesse pessoal, estando atento, acenando com a cabeça e utilizando expressões faciais apropriadas (Bodgan & Biklen, 1994).

Tratando-se de entrevistas que envolviam a discussão ou a resolução de tarefas matemáticas, as entrevistas realizadas nesta experiência de ensino podem ser consideradas como entrevistas clínicas. Nestas entrevistas os alunos explicaram os seus raciocínios na resolução das questões do teste de diagnóstico e, em algumas situações, foram propostas por mim questões de extensão para aprofundar a compreensão sobre os raciocínios evidenciados.

A entrevista clínica como técnica foi introduzida por Piaget, no anos setenta do século passado, para estudar a estrutura do conhecimento e o processo de raciocínio (Clement, 2000). Hunting (1997) refere também a inspiração de Vygotsky e reconhece que estes métodos tornaram possível o desenvolvimento de teorias que consideravam o contexto social onde as aprendizagens ocorriam. Desta forma, é relevante o reconhecimento do papel da linguagem e a importância da clarificação do significado à medida que o investigador coloca as questões e propõe problemas e os alunos explicam as suas ações.

Neste sentido, Hunting (1997) refere que uma das vantagens das entrevistas clínicas é que a fonte de dados (o entrevistado) e quem analisa e interpreta esses dados (o investigador) poderem envolver-se diretamente na comunicação interativa, o que permite que o investigador leia "a ação à medida que ela decorre" (*reads the play as the play proceeds*, no original) (Hunting, 1997, p. 145). Quando o investigador se envolve na comunicação interativa com um aluno tenta aceder, a partir do ponto de vista deste, à sua compreensão sobre determinado conceito, problema ou tópico, com o objetivo de o ajudar a desenvolver essa mesma compreensão. Como o investigador não consegue ter acesso verdadeiramente ao raciocínio do aluno, ele faz inferências a partir das produções deste e procura confirmá-las ou infirmá-las durante o processo de entrevista (Hunting, 1997).

5.4 Critérios de qualidade

De acordo com Confrey e Lachance (2000), os critérios de qualidade usados tradicionalmente na investigação qualitativa (validade interna e externa, fiabilidade e objetividade) parecem não se integrar perfeitamente numa experiência de ensino guiada por uma conjetura. Desta forma, estes autores sugerem novos *standards* que se ajustem a este modelo e que sejam indicadores do sucesso da sua aplicação.

Para certificar a validade de uma experiência de ensino, estes autores distinguem entre critérios de avaliação dos processos internos e critérios de avaliação do impacto potencial. Os primeiros dizem respeito à credibilidade, confiabilidade e fidedignidade das conjeturas, do quadro teórico de suporte e atendem à interação dialética entre a conjetura e a intervenção. Por exemplo, é importante avaliar a relação entre a coerência da história que reconta a relação dialética entre os eventos de sala de aula e a conjetura definida. As vozes dos intervenientes, nomeadamente dos alunos, deve ser ouvida. Ou seja, o investigador deve fornecer dados amplos, citações suficientes sobre as características dos contextos dos alunos falantes, assim como comentários sobre como são representativos dos vários grupos de alunos num dado conjunto de interações. Embora se reconheça que alguns alunos possam ser mais interventivos do que outros, o investigador deve providenciar dados que mostrem como todos experienciaram e beneficiaram da experiência. Também devem haver indicadores concretos do crescente sucesso da aprendizagem de todos os alunos.

Para além disso, Confrey e Lanchance (2000) adoptam os critérios usados por Guba e Lincoln (1989), referindo que os dados têm de ser credíveis, fidedignos e confirmáveis. A credibilidade relaciona-se com a forma como o investigador reconstruiu as experiências vividas pelos alunos. Aspetos como o envolvimento com o contexto da investigação, a observação persistente das interações e do campo, a análise dos casos que não estão de acordo com a conjetura e a verificação com os alunos de que compreendemos o que eles tentaram comunicar-nos, são aspetos a ter em conta relativamente à credibilidade dos dados. A fidedignidade relaciona-se com a estabilidade dos dados e isso pode ser um problema nesta metodologia que está em constante construção. No entanto, as mudanças ocorridas devem ser apresentadas e as suas razões explicadas. A confiabilidade envolve assegurar que as descobertas da investigação são baseadas nos dados apresentados.

A segunda parte dos critérios de qualidade definidos por Confrey e Lanchance (2000) diz respeito à avaliação do potencial impacto. Um dos objetivos deste tipo de investigação é relacionar a investigação com a prática de forma a produzir alterações na sala de aula. Esta parte dos critérios diz, assim, respeito à forma como as suas descobertas estão relacionadas com mudanças alcançáveis. Estes critérios incluem a viabilidade, a sustentabilidade, a natureza convincente, a adaptabilidade e a generatividade. Assim, deve assegurar-se a viabilidade de que os produtos da investigação possam ser implementados com utilidade na sala de aula e que os seus impactos possam ser duráveis no tempo. Nesta ligação à prática, os dados devem convencer da urgência das suas propostas e devem impelir os práticos a realizá-las. Desta forma, devem adaptar-se a contextos particulares e providenciar poderosos meios de reconceptualizar uma variedade de eventos, relações e práticas de sala de aula, devendo ser frutíferos para além das suas conceptualizações iniciais.

5.5 O processo de recolha dos dados

Em setembro de 2010 fiz o convite à professora Susana para participar numa experiência de ensino sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos da sua turma de 4.º ano, a implementar durante todo o ano letivo de 2010/11. Após a aceitação da professora, enderecei os pedidos de autorização aos encarregados de educação dos alunos e ao diretor do agrupamento, com conhecimento à coordenada da escola onde se realizou o estudo (Anexo 1). Este processo foi finalizado em meados de outubro e, nessa data, estavam reunidas as condições para iniciar a implementação da experiência de ensino no contexto da sala de aula.

Assim, a recolha de dados iniciou-se a 14 de outubro de 2010, com a realização de um teste de diagnóstico aos alunos sobre a sua capacidade de generalização. Este foi resolvido individualmente e aplicado em situação normal de sala de aula, dizendo apenas aos alunos que pretendia conhecer a forma como resolviam aquelas questões. O teste foi aplicado a todos os alunos da turma, em simultâneo, e a sua realização demorou cerca de uma hora. As questões foram lidas em voz alta por mim, como acontecia em situações normais de aplicação de testes de avaliação com a professora titular de turma.

Após o teste foram realizadas entrevistas clínicas a doze alunos da turma. Estes alunos foram selecionados tendo como critérios apresentarem diferentes desempenhos na área de matemática e facilidade de expressão oral para explicarem os seus raciocínios. As entrevistas foram realizadas no dia de aplicação do teste de diagnóstico, à tarde, e nos dias seguintes, mais concretamente nos dias 14, 15 e 18 de outubro, em horário pós-letivo, durante o período em que os alunos frequentavam as atividades de enriquecimento curricular (AEC), de modo a não perturbar as restantes aulas da professora Susana. Os alunos eram retirados das aulas de AEC e reuniam-se comigo numa sala da escola onde não decorriam atividades e onde podia ser mantida alguma privacidade. As entrevistas foram sujeitas a gravação áudio, realizadas individualmente e com duração aproximada de 30 minutos por aluno. Nas entrevistas solicitava-se aos alunos que explicassem a forma como tinham resolvido as questões do teste de diagnóstico e, em algumas questões, eram colocadas perguntas de extensão com o objetivo de compreender melhor os seus raciocínios ou as dificuldades que apresentavam.

Em dois dias anteriores dessa semana (dias 12 e 13 de outubro), estive na sala de aula da professora Susana, como observadora, para que os alunos se familiarizassem com a minha presença e com a utilização da câmara de vídeo. Nestas primeiras aulas adotei uma postura de *observadora-como-participante* (Cohen et al., 2007), coadjuvando a professora nos momentos de trabalho autónomo dos alunos e interagindo naturalmente com eles. O ambiente criado nessa semana permitiu que a imersão no campo fosse feita gradualmente e de forma natural e que fosse iniciada uma relação de empatia com os alunos da turma. Assim, quando a recolha de dados efetivamente se iniciou, os alunos já estavam mais familiarizados com a minha presença e postura nas aulas de matemática e aceitando-me como mais uma professora em aula.

A primeira tarefa foi implementada no dia 19 de outubro, iniciando-se, nesse dia, a recolha dos dados com a exploração das tarefas em aula, no âmbito da implementação da experiência de ensino. Tendo em conta o objetivo de articulação curricular com os temas e tópicos trabalhados no programa do 4.º ano (de acordo com a planificação anual definida pela professora titular) e o desenvolvimento do pensamento algébrico, foi acordado com a professora que as aulas da experiência de ensino teriam uma calendarização flexível. Assim, definiu-se que, em principio, as aulas da experiência de ensino decorreriam em dois dias da semana, normalmente às terças e quintas feiras, mas com possibilidade de alteração de acordo com a pertinência de articulação das mesmas com os temas do programa trabalhados pela professora. Desta forma, quando na planificação anual estava estipulado trabalhar as operações multiplicação e divisão ou o tópico das regularidades, por exemplo, as aulas da experiência de ensino eram mais regulares, mas quando era trabalhado o tema geometria ou o tópico dos números racionais, apenas decorriam uma ou duas aulas por semana por esses temas/tópicos não constarem dos propósitos a explorar na experiência de ensino (por uma questão de opção da investigadora). Por outro lado, e tendo em conta a preparação para as Provas de Aferição do 4.º ano de escolaridade que se realizaram no início do mês de maio, e a pedido da professora Susana, não foram realizadas aulas, no âmbito da implementação da experiência de ensino, na última semana do mês de abril e na primeira semana do mês de maio. O Quadro 5.1 mostra a regularidade com que foram realizadas as aulas da experiência de ensino.

Quadro 5.1 – Síntese cronológica dos momentos de recolha de dados, no que respeita às aulas realizadas.

Métodos de recolha de dados	Observação participante e Recolha documental
Fontes	Aulas e produções escritas dos alunos
Dias de outubro	19, 20, 21, 22, 26, 28
Dias de novembro	2, 4, 5, 16, 18, 23, 25, 30
Dias de dezembro	2, 7
Dias de janeiro	13, 21, 27, 28
Dias de fevereiro	3, 10, 11, 24
Dias de março	1, 3, 10, 15, 17, 24,
Dias de maio	12, 13, 19, 20, 23, 27, 30, 31
Dias de junho	2, 3, 6, 7, 8

Em cada aula da experiência de ensino foi explorada uma tarefa matemática, com a duração de cerca de duas horas. Cada tarefa era apresentada em uma ou várias fichas de trabalho, que eram distribuídas aos alunos de forma faseada. Assim, em algumas tarefas era apresentada uma primeira parte que solicitava aos alunos, por exemplo, que experimentassem uma determinada estratégia de cálculo e, na parte seguinte, era pedido que generalizassem essa estratégia de cálculo. A recolha documental incidiu sobre as resoluções escritas dos alunos em pares/grupos nas questões que suscitavam a generalização e esse foi o primeiro nível de análise neste estudo, como foi referido. Para além da recolha das resoluções escritas dos alunos das aulas da experiência de ensino, também foram registados em vídeo e analisados os momentos de discussão coletiva após o trabalho autónomo dos alunos.

Embora este estudo não tenha como objeto a caraterização da colaboração com a professora titular de turma, ela foi necessária e efetiva, mesmo que equacionada de modo pouco formal. Desta forma, foram realizadas diversas reuniões com a professora Susana ao longo da implementação da experiência de ensino. Antes da implementação propriamente dita, reuni com a professora Susana para lhe explicar os propósitos do estudo e discutir a pertinência da exploração com a turma dos aspetos relacionados com o desenvolvimento do pensamento algébrico, assim como a possibilidade de articulação com os diferentes temas e tópicos do programa de matemática do 4.º ano de escolaridade. O modelo de aula exploratória implementado foi também discutido, especialmente para as tarefas da primeira sequência que foram aquelas que a professora Susana dinamizou diretamente em sala de aula. Nessa sequência de tarefas, as reuniões “formais” com a professora foram regulares para discutir as tarefas a implementar, possíveis resoluções dos alunos e a sua exploração. Para além dessas reuniões mais formais foram realizadas diversas conversas informais, especialmente após a realização das aulas, onde foram partilhados pontos de vistas sobre o decorrer das mesmas e onde foram discutidas as tarefas seguintes a implementar. Adicionalmente, a professora Susana pedia regularmente algum apoio na implementação das outras tarefas que decorriam nas aulas entre aquelas que eram objeto da experiência de ensino. Esse pedido de apoio justificava-se pelo acompanhamento que eu costumava fazer aos colegas do agrupamento no âmbito da implementação do PMEB (ME, 2007), como já foi referido. Deste modo, diversas tarefas que eram aplicadas nas aulas que decorriam entre as aulas da experiência de ensino, eram do meu conhecimento e, de certa forma, aconselhadas, embora sem o propósito de desenvolvimento do pensamento algébrico.

Sintetizando, a recolha de dados neste estudo decorreu durante todo o período de implementação da experiência de ensino, no ano letivo de 2010/11, e atendeu aos métodos já referidos: observação participante com gravação áudio e vídeo, recolha documental e entrevistas clínicas. A observação participante incidiu sobre as aulas implementadas na experiência de ensino e também sobre o desempenho dos alunos durante as entrevistas clínicas. A recolha documental foi relativa às produções escritas dos alunos na exploração de todas as tarefas implementadas na experiência de ensino e ainda às resoluções dos alunos no teste de diagnóstico. As entrevistas clínicas ocorreram após a aplicação do teste de diagnóstico e incidiram sobre as resoluções dos alunos nesse teste.

Como sugerem Molina et al. (2007), a recolha de dados foi exaustiva de forma a conseguir descrever com precisão as interações de sala de aula, o desempenho e a evolução dos alunos.

5.6 O processo de análise de dados

De acordo com Confrey e Lachance (2000), nas experiências de ensino orientadas por uma conjetura existem dois tipos de análise de dados que ocorrem em momentos distintos do processo de investigação. O primeiro tipo é contínuo, realizando-se durante a implementação da experiência de ensino, e a análise daí resultante é uma análise preliminar (Confrey &

Lachance, 2000). Este consiste na análise dos dados depois de cada intervenção em sala de aula e lida com a tomada de decisões sobre os passos seguintes da experiência de ensino (Molina et al., 2007). Tendo em conta que o tempo de recolha dos dados é sobrecarregado de atividade, por serem constantes os ajustamentos efetuados no decurso da implementação, é difícil conduzir uma análise sistemática dos dados em simultâneo, nessa fase. Desta forma, o segundo tipo de análise ocorre após a intervenção terminar. É uma análise mais profunda que ocorre numa fase em que se constrói uma história coerente sobre o desenvolvimento das ideias dos alunos e a sua ligação à conjetura (Confrey & Lachance, 2000; Molina et al., 2007). Esta análise retrospetiva envolve uma cuidadosa revisão dos dados e uma reflexão sobre a experiência de ensino realizada de forma a construir um modelo explicativo sobre o que induziu as mudanças observadas nas ecologias de aprendizagem (Gravemeijer & van Eerde, 2009).

Normalmente, os investigadores deste tipo de metodologia recolhem uma grande quantidade de dados de forma a construir uma compreensão detalhada de todo o processo. Como este tipo de estudos ocorre em situações reais de ambientes de aprendizagem, envolve muitas variáveis que podem afetar o sucesso da implementação; as quais, nem sempre podem ser controladas. Assim, e de acordo com Collins et al. (2004), os investigadores têm geralmente problemas em reduzir a imensidão de dados que recolhem, receando diminuir ou simplificar a complexidade característica desses ambientes reais. De facto, esta foi uma dificuldade sentida na análise dos dados recolhidos no âmbito desta experiência de ensino.

Neste estudo, a análise preliminar ocorreu durante a implementação da experiência de ensino. Após cada aula, era feita uma breve análise do desempenho dos alunos na exploração da tarefa matemática, de forma a projetar as tarefas seguintes e adaptar a conjetura à realidade que saía das vivências de sala de aula. Essa análise preliminar teve formas mais sistematizadas que permitiram, em alguns momentos da experiência de ensino, refletir de modo mais profundo sobre o processo que estava sendo vivenciado. Esses momentos resultaram, na maior parte das vezes, na escrita de artigos e/ou comunicações orais em encontros de Educação Matemática. A participação nesses encontros com produções sobre o processo que estava a ser vivenciado na experiência de ensino permitiu que a discussão com outros investigadores enriquecesse o processo de análise continuada. Embora numa fase final da implementação da experiência de ensino, destaca-se também a participação no *Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (P3M) que, devido ao facto de uma das aulas da experiência de ensino ter sido usada como caso multimédia, permitiu um maior confronto e discussão com outros intervenientes, nomeadamente investigadores exteriores ao processo. Esta discussão foi particularmente rica no que concerne à dimensão pedagógica da conjetura que orientou a experiência de ensino. A participação neste projeto também proporcionou que a orientadora deste estudo assistisse a duas aulas da experiência de ensino. Deste modo, ocorreu a observação participante de outro investigador envolvido na construção da experiência de ensino, o que também permitiu aprofundar a análise das tarefas exploradas nessas aulas.

O teste de diagnóstico foi a primeira fonte de recolha de dados neste estudo. Para análise dos dados foram consideradas as respostas escritas de todos os alunos e as entrevistas clínicas realizadas com alguns alunos da turma. Numa primeira fase, foram quantificadas as respostas corretas dos alunos ao teste de diagnóstico e, em seguida, as respostas corretas que envolviam justificações com alguma evidência de generalidade. Numa segunda fase, a análise qualitativa das respostas escritas dos alunos foi complementada com a informação proveniente das entrevistas.

Embora a análise mais sistemática do teste de diagnóstico ocorresse na fase retrospetiva, na altura da sua aplicação foi feita uma análise preliminar no sentido de relacionar os desempenhos dos alunos com a conjetura prévia delineada. De facto, por um lado, percebeu-se nessa análise preliminar que os alunos tinham algumas dificuldades associadas à conceção do sinal de igual como indicador de uma relação e apresentavam resoluções muito centradas em procedimentos rotineiros como os algoritmos. Por outro lado, os alunos não reagiram com dificuldade à introdução de simbologia não numérica e a exploração das situações de generalização parecia fazer emergir essa capacidade natural dos alunos (Mason, 1996).

A análise retrospetiva das aulas implementadas aconteceu após a implementação da experiência de ensino. Embora durante a experiência de ensino tenham sido feitas algumas visualizações dos vídeos que registaram as diferentes aulas e também algumas transcrições dos mesmos, só após a conclusão da fase de intervenção foi possível tornar esse processo mais sistemático. Assim, começou-se por fazer um visionamento de todas as aulas da experiência de ensino e respetiva transcrição dos diversos momentos de cada aula. Essas transcrições foram mais focadas nos momentos de discussão coletiva e de sistematização das aprendizagens. Em algumas tarefas também foram transcritos os momentos de apresentação da tarefa.

Em cada aula era realizada a exploração de uma tarefa matemática e as tarefas foram agrupadas em sequências de tarefas. Após a fase de visionamento e transcrição dos vídeos, foram analisadas as diferentes aulas procurando-se identificar episódios de ensino que permitissem "contar a história". Esse momento foi particularmente problemático pela dificuldade sentida em selecionar os episódios de ensino que fossem ilustrar os elementos mais significativos do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos da turma. Essa dificuldade prendeu-se com a construção da narrativa que permitisse ao leitor compreender todo o processo, mas sem que a mesma se tornasse repetitiva e demasiado extensa. As opções tomadas foram no sentido de focalizar os aspetos mais significativos, respeitando a ordem cronológica pelo qual ocorreram. Assim, começou-se por selecionar aulas onde as tarefas exploradas permitissem identificar as diferentes etapas do processo de forma a traçar uma trajetória de aprendizagem compatível com o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. As etapas identificadas respeitaram as sequências de tarefas realizadas e foram as seguintes: 1) A descoberta de regularidades numéricas - sequência I; 2) Exploração de relações numéricas – sequência II; 3) Exploração da variação de quantidades – sequência III; 4) Exploração de regularidades numéricas – sequência IV; e 5) Exploração de relações funcionais – sequência V. Da primeira etapa não foram selecionadas aulas ou tarefas para análise devido ao facto desta etapa da experiência de ensino ser muito introdutória e não revelar dados muito significativos para a compreensão do estudo. Foram, assim, selecionadas para análise algumas tarefas das etapas e sequências seguintes. Desta forma, das 41 tarefas realizadas na experiência de ensino foram selecionadas nove (Quadro 5.2) para uma análise mais detalhada. A caracterização das cinco sequências e das respetivas tarefas é descrita, mais pormenorizadamente, no capítulo seguinte referente à experiência de ensino.

Quadro 5.2 – Tarefas analisadas e respetivas sequências.

Sequências		**Tarefa**	
II	A exploração de relações numéricas	13	Calcular usando o dobro
		15	A estratégia do Afonso
III	A exploração da variação de quantidades	21	Os cromos da Ana e do Bruno
		22	Descobre A e B
IV	A exploração de regularidades numéricas	30	Pensa num número
		32	Explorando calendários e tabelas
V	A exploração de relações funcionais	38	Os colares I
		40	Os colares II
		41	Cubos com autocolantes

Tendo em conta as duas dimensões da conjetura que orientou a experiência de ensino, a análise dos dados deveria refletir essas duas dimensões de forma clara e precisa. Assim, foi também necessário analisar de forma sistemática a dimensão pedagógica da conjetura. A forma de exploração das tarefas matemáticas para o desenvolvimento do pensamento algébrico foi identificada por diversos autores (e.g. Blanton & Kaput, 2005) como particularmente importante e, portanto, esta dimensão não pode ser desligada da dimensão de conteúdo. Assim, tomando cada aula/tarefa selecionada como foco de análise, foram considerados dois momentos como objetos de análise aos quais se aplicou o mesmo quadro de análise. O primeiro momento diz respeito ao trabalho autónomo dos alunos em pares ou grupos, na resolução da tarefa, e, o segundo momento, às discussões coletivas realizadas na turma. No primeiro momento foram considerados para análise as produções escritas resultantes dos momentos de trabalho autónomo dos alunos. Os pares ou grupos de alunos foram identificados através da numeração romana (de I a IV), variando o seu número entre um a nove, nas diferentes tarefas. O segundo momento focou-se na discussão coletiva e considerou as interações comunicativas realizadas pela apresentação e discussão dos trabalhos dos pares/grupos ao coletivo da turma. Neste segundo momento, a análise considerou também a condução da discussão coletiva feita pela investigadora e a sua relação com o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Assim, nestes momentos são considerados dois aspetos complementares: o que os alunos fazem e o que a investigadora faz. Naturalmente, estes dois aspetos estão interrelacionados e condicionam-se mutuamente: as ações dos alunos conduzem a ações específicas da investigadora e vice-versa.

O quadro de análise (Anexo 4) inspirou-se, primeiramente, no enquadramento teórico de suporte a este estudo e, em seguida, no confronto com as evidências dos dados recolhidos. Assim, embora as ideias gerais do quadro de análise tenham sido definidas à priori, antes da fase de análise dos dados e alicerçadas na conjetura prévia, a versão final desse quadro ocorreu através da definição de categorias que resultaram da interpretação dos dados recolhidos.

O quadro de análise centra-se no desenvolvimento do pensamento algébrico, em diferentes domínios. O primeiro domínio de análise diz respeito aos contextos de promoção do pensamento algébrico que as tarefas matemáticas exploraram. Assim, algumas tarefas foram analisadas de acordo com o contexto do pensamento relacional, e outras, de acordo com o contexto do pensamento funcional (ver capítulo seguinte, para uma explicação mais detalhada). Como cada um desses contextos tem características específicas, as categorias de análise são também diferenciadas.

O Quadro 5.3 sistematiza as categorias de análise dos níveis de pensamento relacional. Os níveis considerados incluem um nível zero, dois níveis intermédios e um nível superior. O nível zero é entendido como "não relacional" por não evidenciar qualquer aspeto do pensamento relacional. No nível um, "utilização de exemplos particulares", estes são usados no reconhecimento das relações numéricas e/ou propriedades das operações, mas sem estender o raciocínio para outros casos. No nível dois, "utilização de quase-variáveis", os exemplos particulares são usados com sentido quase-variável (Fujii, 2003), ou seja, não são restritos aos casos particulares que são utilizados como exemplos da relação numérica e/ou propriedade da operação. O último nível, marcadamente "relacional", não se centra em exemplos particulares e revela a generalidade da relação numérica e/ou propriedade da operação. Estes níveis são marcadamente gradativos, embora não sejam necessariamente consecutivos.

Quadro 5.3 – Categorias de análise dos níveis de pensamento relacional.

Níveis de Pensamento Relacional		
Nível 0	Não relacional	Não reconhece as relações numéricas e/ou propriedades das operações, centrando-se em procedimentos de cálculo.
Nível 1	Utilização de exemplos particulares	Reconhece e usa relações numéricas e/ou propriedades das operações em exemplos particulares.
Nível 2	Utilização de Quase-variáveis	Reconhece e usa relações numéricas e/ou propriedades das operações em exemplos particulares, mas com sentido de quase-variáveis.
Nível 3	Relacional	Reconhece e usa relações numéricas e/ou propriedades das operações independentemente dos casos particulares, evidenciando a sua generalidade.

No que concerne ao pensamento funcional são utilizadas também categorias de análise específicas. Os níveis considerados incluem um nível zero, um nível intermédio e um terceiro nível. No nível zero, "não relacional" ou "variação simples", não há evidência do reconhecimento da relação entre variáveis. Neste nível pode haver a identificação da variação em uma das variáveis (ou até nas duas), mas sem estabelecer uma relação entre as variáveis independente e dependente. No nível um, "relação recursiva", há o reconhecimento da relação entre variáveis, mas através da utilização de um padrão recursivo instrumental (Martinez & Brizuela, 2006; Tanish, 2011). No nível dois evidencia-se a "relação funcional", ou seja, há identificação explícita da relação entre a variável independente e a variável dependente. O Quadro 5.4 sistematiza essas categorias de análise.

Quadro 5.4 – Categorias de análise dos níveis de pensamento funcional.

Níveis de Pensamento Funcional		
Nível 0	Não relacional – variação simples	Não reconhece uma relação entre as variáveis, podendo reconhecer (recursivamente) apenas a variação em uma variável ou nas duas variáveis, mas isoladamente. Desta forma, não considera a relação entre variáveis.
Nível 1	Relação Recursiva	Reconhece recursivamente uma relação entre as variáveis.
Nível 2	Relação Funcional	Reconhece a relação direta entre a variável dependente e a variável independente.

O segundo domínio do quadro de análise diz respeito ao processo de generalização. Para a definição das categorias de análise foi considerada a pertinência da existência de diferentes níveis de generalização (Mason et al., 2007; Radford, 2008, 2010). Os níveis de generalização considerados inspiram-se e interrelacionam nas perspetivas de Radford (2008), Rivera e Becker (2007a) e Mason et al. (2007). Atendem à distinção entre generalização aritmética e generalização algébrica (Radford, 2008) e consideram cinco níveis diferenciados e progressivos. O nível zero corresponde às situações em que não é detetada a comunalidade entre os casos e é considerado como um nível de não generalização. O nível um corresponde à generalização aritmética, identificado quando a comunalidade é detetadas apenas nos casos apresentados, não enunciando a extensão para quantidades indeterminadas. No primeiro nível de generalização algébrica, nível dois de generalização, a indeterminação aparece mas não é nomeada. As quantidades são tratadas com o sentido de quase-variável e há a emergência de uma regra para os casos particulares. O nível três de generalização diz respeito ao nível contextual onde a indeterminação aparece e é tratada analiticamente. Neste nível de generalização há a definição de uma regra geral, mas ainda ancorada à descrição do contexto da situação. O nível quatro da generalização considera a generalização global e não envolve a descrição do contexto da situação na definição da regra geral. O último nível de generalização, nível estrutural, permite a revelação da estrutura matemática dos objetos e conduz à definição de uma regra estrutural. O Quadro 5.5 apresenta as categorias usadas para a análise dos níveis de generalização.

Quadro 5.5 – Categorias de análise dos níveis de generalização.

Níveis de Generalização			
Nível 0		Não Generaliza	Não reconhece a comunalidade entre os casos apresentados. Apresenta, eventualmente, tentativas de apreensão da comunalidade, mas que se baseiam em palpites e não são testadas.
Nível 1		Generalização Aritmética	Reconhece a comunalidade entre os casos apresentados, mas apenas considera as quantidades conhecidas e opera com elas. Não faz a extensão para quantidades indeterminadas e, desta forma, não define uma regra geral.
Generalização Algébrica	Nível 2	Factual ou empírica	Reconhece a indeterminação com sentido de quase-variável, a partir de casos particulares, mas não a nomeia. Apresenta, eventualmente, uma regra para os casos particulares.
	Nível 3	Contextual	Nomeia a indeterminação e trata-a analiticamente, apoiando-se numa descrição do contexto da situação. Define uma regra geral, mas dentro do contexto da situação.
	Nível 4	Global	Nomeia a indeterminação de forma global e trata-a analiticamente, não se apoiando na descrição do contexto da situação. Define uma regra geral.
	Nível 5	Estrutural	Nomeia a indeterminação de forma geral e trata-a analiticamente, revelando a estrutura matemática dos objetos. Define uma regra estrutural.

Finalmente, foram analisadas as diferentes formas de expressão da generalização, identificando-se os tipos de representação utilizados pelos alunos como o terceiro domínio do quadro de análise. Sem um carácter marcadamente gradativo dos níveis de sofisticação, como é evidente nas categorias utilizadas nos outros domínios, os tipos de representação são categorizados desde a linguagem natural à linguagem simbólica. O Quadro 5.6 apresenta as categorias de análise relativas aos tipos de representação.

Quadro 5.6 – Categorias de análise dos tipos de representação.

Tipos de representação	Linguagem natural		Usa uma descrição verbal, escrita ou oral.
	Numérica		Usa uma expressão numérica.
	Icónica	Desenhos	Usa desenhos.
		Tabelas	Usa tabelas.
		Diagramas ou esquemas	Usa diagramas (de setas, do modelo da balança,...) ou esquemas.
	Pré-simbólica	Sincopada	Usa uma linguagem sincopada.
	Simbólica	Idiossincrática	Usa símbolos próprios.
		Alfanumérica	Usa a notação alfanumérica.

Concluindo, o processo de análise na experiência de ensino incidiu sobre as resoluções escritas dos alunos durante o momento de trabalho autónomo e as interações comunicativas nas discussões coletivas realizadas, tendo por base o quadro de analise já referido: nível de pensamento relacional/funcional, nível de generalização e tipos de representação. Nos registos escritos dos alunos relativos às tarefas matemáticas selecionadas foram identificados os diferentes níveis (ou tipos, no caso das representações) para cada domínio, que foram sistematizados quantitativamente de modo a ilustrar o desempenho global da turma. Nas discussões coletivas, os pares/grupos de alunos selecionados apresentaram as suas resoluções e esse facto permitiu apurar melhor a análise feita sobre as resoluções escritas, complementando-a. Para além disso, a condução feita pela investigadora no decurso das discussões coletivas foi também analisada, no sentido de se evidenciarem os níveis dos diferentes domínios que foram explorados ou promovidos. Este facto foi importante para identificar aspetos intencionais da condução feita pela investigadora, nas discussões coletivas, que tiveram um papel relevante no desenvolvimento algébrico dos alunos, para além das tarefas delineadas.

Capítulo 6 – A experiência de ensino

Este capítulo carateriza a experiência de ensino realizada, enunciando os pressupostos teóricos (de conteúdo matemático e pedagógico-didático), o diagnóstico realizado aos alunos da turma e as sequências de tarefas concretizadas.

Desta forma, começo por enunciar a conjetura que orientou a experiência de ensino, nas suas dimensões de conteúdo e pedagógica (Confrey & Lachance, 2000). A dimensão de conteúdo é apresentada tendo em conta três aspetos específicos que orientaram esta experiência de ensino: i) a definição de pensamento algébrico e a sua pertinência no 1.º ciclo, ii) a expressão e representação da generalização e, iii) os contextos de promoção do pensamento algébrico. A dimensão pedagógica que orientou a experiência de ensino é apresentada nos seguintes aspetos particulares: i) a perspetiva dialógica de construção do conhecimento matemático, ii) a aula exploratória e, iii) as tarefas matemáticas.

Em seguida, apresento a análise ao teste de diagnóstico aplicado aos alunos antes da implementação da experiência de ensino. Com o objetivo de perceber como os alunos resolviam tarefas que implicavam a expressão e representação da generalização, em situações relacionadas com aspetos dos pensamentos relacional e funcional, a análise do seu desempenho no teste de diagnóstico permitiu definir algumas linhas orientadoras para a construção das primeiras tarefas da experiência de ensino.

Na última secção deste capítulo, apresento as sequências de tarefas concretizadas na experiência de ensino. São indicados os objetivos gerais de cada sequência e os objetivos específicos de cada uma das tarefas.

6.1 A conjetura que orientou a experiência de ensino

De acordo com o referido na secção da metodologia, a experiência de ensino realizada foi orientada por uma conjetura, na perspetiva definida por Confrey e Lachance (2000). Nesta conjetura estão interligadas duas dimensões principais, uma referente ao conteúdo matemático e outra a aspetos pedagógicos, ou seja, ao modo como esse conteúdo é ensinado.

Em seguida, apresentam-se as dimensões de conteúdo e pedagógica da conjetura que orientou esta experiência de ensino.

6.1.1 Dimensão de conteúdo da conjetura

Esta conjetura está assente numa definição particular do pensamento algébrico onde a generalização se assume como elemento central e a sua representação pode ser de diferentes tipos e gradualmente mais simbólicos. As tarefas que promovem aspetos relacionados com o desenvolvimento dos pensamentos relacional e funcional são encaradas como contextos para a promoção da generalização e, desta forma, do pensamento algébrico.

A dimensão de conteúdo da conjetura assente na definição de pensamento algébrico segundo Blanton e Kaput (2005), apresenta as seguintes grandes ideias a desenvolver: i) Promover a generalização; ii) Desenvolver o pensamento relacional; iii) Desenvolver o pensamento funcional; iv) Desenvolver a simbolização; e v) Promover o uso de diferentes representações. Conjetura-se, assim, que a generalização e a simbolização se assumem como aspetos centrais do pensamento algébrico a serem promovidos em tarefas com contextos de exploração do pensamento relacional e do pensamento funcional. O Quadro 6.1 apresenta os objetivos para cada um desses contextos.

Quadro 6.1 – Aspetos da dimensão de conteúdo da conjetura.

<table>
<tr><th colspan="2">Pensamento algébrico</th><th rowspan="2">Objetivos</th></tr>
<tr><th>Aspetos centrais</th><th>Contextos</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Generalização e Simbolização</td><td rowspan="2">Pensamento relacional</td><td>– Reconhecer a igualdade como uma relação.</td></tr>
<tr><td>– Descrever, generalizar, justificar e simbolizar relações numéricas;
– Descrever, generalizar, justificar e simbolizar propriedades dos números e das operações.</td></tr>
<tr><td>Pensamento funcional</td><td>– Reconhecer relações entre variáveis;
– Identificar, generalizar e simbolizar relações funcionais;
– Interpretar, construir e relacionar diferentes representações.</td></tr>
</table>

Na dimensão de conteúdo da conjetura importa atender aos seguintes aspetos: i) definição de pensamento algébrico e sua pertinência no 1.º ciclo, ii) a expressão e representação da generalização, e, iii) contextos de promoção do pensamento algébrico.

Definição de pensamento algébrico e sua pertinência no 1.º ciclo

A definição de pensamento algébrico assumida nesta experiência de ensino é a apresentada por Blanton e Kaput (2005), enquanto "processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade" (p. 413).

Diversos estudos mostram que alunos do 1.º ciclo do ensino básico conseguem pensar algebricamente (e.g. Blanton & Kaput, 2005; Carpenter et al., 2003; Carraher et al., 2007; Radford, 2011; Warren & Cooper, 2005). Tendo em conta a predominância da aritmética neste nível de escolaridade, uma reformulação da forma como é ensinada permite a introdução de ideias algébricas (Cai & Knuth, 2005). Assim, e de acordo com Carraher e Schliemann (2007), a introdução do pensamento algébrico na escola elementar acarreta novas visões sobre a aritmética e a álgebra e a forma como estas se relacionam, assumindo que se pode construir uma ponte entre elas.

O PMEB (ME, 2007), no qual se ancora este estudo, contempla a exploração do pensamento algébrico desde o 1.º ciclo do ensino básico e justifica a pertinência da concretização desta experiência de ensino. Este documento curricular reconhece a importância da introdução do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade através da exploração de "regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios" (ME, 2007, p. 14), da investigação de "sequências numéricas e padrões geométricos" (idem, p. 40) e do "desenvolvimento da noção de proporcionalidade" (idem) pela aprendizagem das estruturas multiplicativas. Embora não apresente um tópico especifico de desenvolvimento do pensamento algébrico, no que concerne aos 3.º e 4.º anos de escolaridade, o PMEB apresenta no tópico Regularidades do tema Números e operações, os seguintes objetivos específicos:

- Investigar regularidades numéricas;
- Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional. (p. 18)

De forma a tornar o currículo matemático mais unificado e interligado (Kaput et al., 2008), a articulação curricular com outros temas e tópicos é também um objetivo desta experiência de ensino, entendendo-se o pensamento algébrico como *fio condutor curricular* (NCTM, 2000). Dito de outra forma, trata-se de evidenciar o caráter algébrico do currículo matemático da escola elementar, como referem Carraher et al. (2008). De forma particular, o contexto da aritmética é entendido como tema promissor, embora não exclusivo, para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos do 4.º ano de escolaridade.

A expressão e representação da generalização

De acordo com a definição de pensamento algébrico assumida nesta experiência de ensino, a generalização é entendida como aspeto central e envolve a extensão do raciocínio para além do caso ou casos considerados inicialmente. Isso implica reconhecer a comunalidade (Kaput, 1999; Malara, 2012; Mason, 1996; Radford, 2008, 2010), mas também a particularidade (Mason, 1996), conduzindo a experiências como *ver a generalidade a partir do particular* e *ver o particular no geral* (Mason, 1996). Nesta experiência de ensino também se considera que a generalização pode ser expressa de diversas formas, desde a linguagem natural a formas gradualmente mais simbólicas (Blanton, 2008). Assume-se a importância das representações ativas, icónicas e simbólicas (Bruner, 1966) e a sua relação com a generalização, tanto para a sua expressão, como para a compreensão das relações matemáticas que pode conduzir a essa generalização. Considera-se ainda a importância das conexões entre diferentes tipos de representações (Cooper & Warrren, 2011). Na construção progressiva do sentido de símbolo, assume-se a importância da exploração das representações próprias dos alunos, idiossincráticas, e progressiva apreensão das formas convencionais, de modo a facilitar a aprendizagem e comunicação matemáticas. (NCTM, 2000).

A generalização entendida como um processo dinâmico, socialmente situado, que se desenvolve através de ações colaborativas (Ellis, 2011) assume particular relevância nesta experiência de ensino. De acordo com Ellis (2011), a generalização é uma atividade desenvolvida pelas pessoas dentro de um contexto sociomatemático específico, surgindo como uma representação coletiva que tem raiz na comunidade, através de experiências mediadas pela interação, linguagem e outras ferramentas próprias. Esta autora refere, ainda, que a ação de generalização decorre em ciclos de interação onde uma generalização inicial pode revestir-se de novas formas, passando pela interação e reflexão coletivas, sendo a versão de generalização final não o produto de um só aluno, mas resultante do desenvolvimento ocorrido na interação do grupo.

A exploração de diferentes níveis de compreensão da generalização tem particular relevância nesta experiência de ensino. Britt e Irwin (2011) salientam a necessidade de os alunos mais novos trabalharem em diferentes níveis de compreensão da generalização que envolvam a expressão dessa generalização em palavras, imagens e gráficos, assim como com símbolos numéricos que atuem como quase-variáveis. Para tal, sugerem o seguinte percurso: primeiramente, os alunos devem ser encorajados a trabalhar com números como quase-variáveis; depois a expressar a generalização em linguagem natural e, em seguida, usando os símbolos algébricos. Nesta experiência de ensino considera-se particularmente importante a perspetiva destes autores.

Relativamente à introdução da simbolização em alunos destes anos de escolaridade, esta experiência de ensino orienta-se pela perspetiva de Russell, Schiffer e Bastable (2011) ao defenderem que a introdução da notação algébrica não só providencia uma expressão concisa das ideias dos alunos como oferece novas formas de percecionar as relações matemáticas. Tendo em conta a perspetiva de Kaput (2008), de que o pensamento algébrico "é composto por processos complexos de simbolização que servem o propósito da generalização e do raciocínio com generalizações" (p. 9), a generalização e a simbolização são processos estritamente relacionados. A simbolização ao serviço da generalização permite uma expressão unificadora e concisa das relações matemáticas, surgindo como uma forma de expressão eficaz da generalização.

Contextos de promoção do pensamento algébrico

Nesta experiência de ensino consideram-se as situações que fomentam o pensamento relacional e o pensamento funcional como contextos de promoção da generalização. Isto significa que tarefas matemáticas que promovam a exploração de aspetos relativos ao pensamento relacional e ao pensamento funcional podem ser consideradas como contextos para o desenvolvimento da generalização, no sentido em que Blanton (2008) considera a aritmética generalizada e o pensamento funcional como portas de entrada para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Conjetura-se, portanto, que estes contextos são promotores do desenvolvimento do pensamento algébrico por contribuírem para o desenvolvimento e a representação da generalização.

No que respeita ao pensamento relacional, este contempla a capacidade de usar relacionalmente a aritmética de forma a fazer uso da estrutura subjacente às relações numéricas e às propriedades das operações e encarar a igualdade como uma relação de equivalência. De acordo com Carpenter et al. (2003), o pensamento relacional é a capacidade de olhar para expressões ou equações na sua conceção mais ampla, revelando as relações existentes. Desta forma, os contextos que procuram desenvolver aspetos relativos ao pensamento relacional exploram a igualdade como uma relação, as relações numéricas e as propriedades das operações.

No âmbito do pensamento relacional, a noção de quase-variável (Fujii, 2003) tem particular importância nesta experiência de ensino. A expressão quase-variável significa um número ou conjunto de números numa expressão que revelam a relação matemática subjacente e que se manterá verdadeira independentemente dos números que sejam usados (Fujii, 2003). Ou seja, expressões quase-variáveis são expressões numéricas particulares passíveis de serem generalizadas. O *pensamento quase-variável* pode constituir-se como uma importante ponte entre a aritmética e a álgebra e, também, uma introdução ao conceito de variável (Fujii & Stephens, 2008).

No que respeita ao pensamento funcional, este baseia-se num conjunto de capacidades para além daquelas que estão associadas ao pensamento relacional. Requer que os alunos considerem a mudança e o crescimento, o que envolve, por exemplo, estar atento à forma como as quantidades variam em relação umas às outras (Blanton, 2008). Atende a uma relação particular que tem subjacente a noção de função, ou seja, uma relação de correspondência entre variáveis. Desta forma, os alunos precisam reconhecer as variáveis envolvidas numa relação e a forma como estas variam em dependência uma da outra. De acordo com o NCTM (2000), a noção de variação deverá ser trabalhada desde muito cedo na escolaridade, sendo essencial para a construção da noção de função. Neste sentido, importa explorar situações que envolvam o reconhecimento da relação entre variáveis que permitam identificar, generalizar e simbolizar relações funcionais e também representá-las.

6.1.2 Dimensão pedagógica da conjetura

A dimensão pedagógica da conjetura relaciona-se com a dimensão de conteúdo na medida em que diz respeito à forma como este é ensinado. No respeitante ao desenvolvimento do pensamento algébrico, a dimensão pedagógica da conjetura é particularmente importante. Como referem Blanton e Kaput (2005), os professores devem desenvolver *olhos e ouvidos algébricos* para integrarem natural e espontaneamente a abordagem dos conteúdos e procedimentos algébricos na sala de aula, durante um período de tempo significativo que permita a sua maturação gradual.

Nesta experiência de ensino, a dimensão pedagógica da conjetura enquadra-se numa perspetiva dialógica de construção do conhecimento matemático (Wells, 2000) e prende-se com a construção de um ambiente de sala de aula condicente com uma prática de ensino de natureza exploratória.

A dimensão pedagógica da conjetura assenta em princípios de ensino e aprendizagem que favorecem o desenvolvimento de um ambiente de sala de aula onde as discussões coletivas assumem um papel predominante e o trabalho dos alunos se desenvolve a pares, pequenos grupos e coletivamente. As tarefas matemáticas foram organizadas em sequências que permitem o desenvolvimento de aspetos centrais do pensamento algébrico e, simultaneamente, se inserem nos temas e tópicos matemáticos definidos na planificação anual da disciplina, respeitando a lógica de articulação curricular enunciada. Conjetura-se, assim, que este modelo de aula e forma de organizar o trabalho dos alunos e as tarefas selecionadas podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Em seguida, subdivide-se a dimensão pedagógica da conjetura nos seguintes tópicos: i) a perspetiva dialógica de construção do conhecimento matemático, ii) a aula exploratória e, iii) as tarefas matemáticas.

A perspetiva dialógica de construção do conhecimento matemático

A teoria sociocultural desenvolvida por Vygotsky (1978) preconiza uma relação complexa e dinâmica entre linguagem e pensamento. Reconhecendo na linguagem um papel essencial para a formação do pensamento, e tendo em conta que a linguagem é um fenómeno social, este autor considera que o pensamento é profundamente embebido nas atividades sociais e práticas culturais. Desta forma, o pensamento e a linguagem são entendidos como atividades em inter-relação, ou seja, a verbalização de um pensamento não torna apenas explícito o implícito, como também gera o pensamento. O conceito de *zona de desenvolvimento proximal* enfatiza a conceção social da aprendizagem ao considerar que a criança se desenvolve na interação com outros. Assim, entendendo a aprendizagem como um processo de integração do sistema de signos culturais, a linguagem é considerada por Vygotsky como uma poderosa ferramenta.

Neste sentido, e de acordo com Sfard (2001), colocar a comunicação no centro da educação matemática implica mudar não só a forma como se ensina, mas também a forma como se pensa sobre a aprendizagem e o que é aprendido. Assim, esta autora considera que a comunicação não pode ser vista apenas como uma ferramenta para expressar o pensamento, mas quase como o equivalente ao próprio pensamento. De acordo com esta autora, a aprendizagem é um processo de modificação na forma do discurso, ou seja, uma extensão das capacidades discursivas de forma a ser capaz de comunicar sobre novos tópicos (matemáticos) dentro da comunidade matemática. Aos críticos que possam argumentar que a aprendizagem é mais do que uma modificação na comunicação por implicar mudanças na forma de pensar, Sfard (2001) contrapõe referindo que considera "o pensamento como um especial caso da atividade de comunicação" (p. 3). Esta autora refere que quando uma pessoa pensa está a comunicar consigo mesma e que isso acontece com palavras, imagens ou qualquer outra forma simbólica.

> O nosso pensamento é claramente um esforço dialógico, onde nos informamos a nós próprios, argumentamos, colocamos questões e respondemos. Assim, tornar-se um participante num discurso matemático é equivalente a aprender a pensar de uma forma matemática. (Sfard, 2001, p.4)

Desde o início da última década do século passado, diferentes perspetivas em educação matemática foram desenvolvidas no sentido de mudar o foco da aprendizagem individual para a aprendizagem em contexto de sala de aula. Particularmente tem sido evidente o foco de atenção no papel que o discurso de sala de aula pode ter para o desenvolvimento conceptual dos alunos (Cobb et al., 1997).

Cobb, Wood e Yackel (1991) compreendem a vida de uma sala de aula como uma comunidade de inquirição, onde há a criação de um "conhecimento tomado como partilhado" (p. 24) na comunidade. O *conhecimento tomado como partilhado* implica que os aspetos do conhecimento são partilhados dentro de um quadro interpretativo coletivo que constitui a base de comunicação entre os participantes da comunidade. Estes autores descrevem a negociação que constitui a prática matemática efetiva e apropriada na sala de aula através do envolvimento da comunidade de aprendizagem em conversações sobre como praticar matemática colaborativamente. Isso implica a existência de normas sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996), ou seja, normas sociais particulares de uma aula de matemática por serem específicas dos aspetos matemáticos da atividade dos alunos. Essas normas evidenciam um acordo mútuo sobre o que significa praticar matemática na comunidade, o que implica uma compreensão sobre as formas que são consideradas válidas matematicamente. Distinguindo entre normas sociais e normas sociomatemáticas, Yackel e Cobb (1996) referem que a compreensão do que se espera que os alunos expliquem sobre as suas soluções e modos de pensamento pode ser considerada como norma social, enquanto que a compreensão do que é considerado como uma explicação matemática aceitável já é uma norma sociomatemática. Neste sentido, Cobb, Yackel e Wood (1989) referem que é importante distinguir entre "conversar sobre a matemática" e "conversar sobre conversar sobre matemática". É através das conversas sobre conversar sobre matemática que se desenvolve uma compreensão partilhada do que significa dar uma explicação matemática, compreender a explicação de outros e colaborar para aprender matemática, por exemplo. Para além disso, a construção das normas sociomatemáticas permite adquirir uma conceção do que é a matemática e do que significa fazer matemática na comunidade.

Nessa comunidade de inquirição a atividade dialógica coletiva tem como objetivo criar um consenso através da argumentação, inserindo-se numa perspetiva em que se assume que a construção do conhecimento e a formação dos conceitos não se faz através da transmissão do professor, da reflexão individual ou do debate; mas através do que é referido como "construir a partir das ideias uns dos outros" (Kennedy, 2009, p. 72), ou seja, através de um "pensamento distribuído" (idem) num contexto dialógico. A discussão numa comunidade matemática de inquirição desenvolve-se através de intervenções de pensamento críticas, incluindo o questionamento, apresentação de exemplos e contraexemplos, pedido de justificações, dar razões, clarificações, explorando outras hipóteses, desenhando conclusões, fazendo inferências e outros. Isso traduz-se num processo contínuo que envolve ouvir e responder, clarificar e reformular, exigindo manter-se sensível ao contexto e disponível para novas interpretações e vários estilos expressivos, cognitivos e discursivos (Kennedy, 2009).

O diálogo oferece uma possibilidade para a reconstrução, não apenas de perspetivas e ideias, mas também de valores, modos de ação, crenças, atitudes, disposições e relações. Num diálogo uma pessoa "pensa por ela própria e com os outros" (Kennedy, 2009, p. 73). A inquirição matemática ideal acontece através de uma forma de argumentação que, devido a ser inerentemente dialógica, é implicada num processo dialético que se move entre tentativas de encontrar e resolver inadequações e inconsistências. A argumentação é compreendida como uma nova forma de discurso coletivo na sala de aula, não como um debate, mas como uma competição cooperativa na construção de um argumento coletivo (Kennedy, 2009).

De acordo com Kennedy (2009), a construção de um processo de comunidade de inquirição acontece no que denomina como "zona de desenvolvimento proximal coletiva" (p. 74), a qual atua como base para a construção de conceitos e capacidades em cada indivíduo individualmente. O conceito de *zona de desenvolvimento proximal* representa a distância entre o desenvolvimento atual e o que pode acontecer quando a aprendizagem é facilitada por alguém com maior experiência do que o aprendiz. Esse processo funciona através de subprocessos como a clarificação, a reformulação, a sumarização e explicação, assim como o desafio e o desacordo. A emergência de diferentes perspetivas inevitavelmente dá oportunidade para que aconteçam oposições, inadequações e contradições, e isso força a discriminação e a produção e resolução das diferenças. Neste contexto, para este autor a “transformação coletiva do conceito” (p. 74) é compreendida para operar através da emergência de conflitos cognitivos e da resolução desses conflitos de uma forma dialética – ou seja, através da reconstrução e articulação de contradições e inconsistências, e a sua mediação através do processo já discutido – diálogo comum, raciocínio integrado, pensamento distribuído, argumentação coletiva, ou seja, as dinâmicas que atuam em comunidades de inquirição matemática.

Também Lampert e Cobb (2003) consideram que quando os alunos estão envolvidos na argumentação matemática e produzem evidências matemáticas, eles precisam falar ou escrever de forma a expor o seu raciocínio aos outros e ao professor. Tal como outros aspetos da matemática, a comunicação e a linguagem precisam ser ensinados e aprendidos nas salas de aula. Adicionalmente, a aprendizagem da comunicação como um objetivo de ensino não pode ser separada da comunicação como meio pelo qual os alunos desenvolvem a compreensão matemática. Em qualquer área particular da matemática, os tipos de comunicação nos quais os alunos se envolvem podem ser limitados pela sua compreensão matemática, e reciprocamente estes desenvolverem compreensões matemáticas mais sofisticadas à medida que conseguem comunicar os seus raciocínios. Desta forma, a comunicação matemática não pode ser reduzida a conteúdo do currículo nem a um conteúdo do ensino, uma vez que abrange simultaneamente essas duas dimensões (Lampert & Cobb, 2003).

Na perspetiva de Boavida (2005), este tipo de ambientes de sala de aula constituem o que denomina por “cultura de argumentação” (p. 14), ou seja, um ambiente de sala de aula em que os alunos se envolvem na apresentação e defesa das suas ideias, reagem e comentam as contribuições dos colegas e a turma procura chegar a consensos sobre o significado de ideias matemáticas importantes. Para constituir e manter uma comunidade com estas características, o professor deve fazer emergir as ideias dos alunos e também criar as condições necessárias para que este tipo de interações ocorra (Boavida, 2005). Uma aula com uma cultura de argumentação pode ser caraterizada da seguinte forma:

> É uma comunidade de aprendizagem em que as respostas imprevistas não são descartadas meramente por serem inesperadas; em que se encoraja a partilha e análise de várias estratégias de resolução e suas relações; em que se incentiva a reflexão sobre a inventariação e uso criativo de ideias matemáticas que podem ser úteis para fazer face a uma dada situação; em que se fomentam e apoiam discussões focadas na avaliação crítica e fundamentada de diferentes contribuições e abordagens; e em que se favorece a liberdade de expressão de modo a que os alunos se sintam seguros para assumir riscos e partilhar ideias emergentes e titubeantes. (Boavida & Menezes, 2012, p. 293)

Boavida (2005) refere que envolver os alunos em atividades de argumentação matemática requer a negociação de normas de ação e interação que favorecem a constituição e desenvolvimento de uma comunidade de discurso matemático. Simultaneamente, esta autora sublinha que o discurso desejável numa aula com uma cultura de argumentação envolve:

> A apresentação, por parte dos alunos, de argumentos em defesa das suas ideias, a análise crítica das contribuições dos colegas, a discussão da legitimidade matemática de cadeias de raciocínio, a expressão de desacordos e sua resolução, a fundamentação de posições com argumentos de caráter matemático, a avaliação de se é, ou não, apropriado usar um determinado raciocínio na resolução de um problema, a formulação de conjeturas e a avaliação da plausibilidade e/ou validade destas conjeturas. (p. 22)

Para Boavida (2005), a argumentação matemática refere-se à argumentação na aula de matemática, ou seja, conversações cujo foco é a matemática e que assumem a forma de raciocínios de carácter explicativo ou justificativo destinados a diminuir riscos de erro ou incerteza na escolha de um caminho, ou a convencer um auditório a aceitar ou rejeitar certos enunciados, ideias ou posições pela indicação de razões. Também refere a importância do auditório, indicando que na argumentação se deve dar atenção ao outro, seja um aluno, o professor ou toda a turma, que pode ou não estar de acordo com quem argumenta. Como atividades de argumentação matemática, Boavida destaca a formulação e avaliação de conjeturas, podendo ainda incluir a produção de provas matemáticas. Em suma, a autora considera a argumentação como um modo possível de comunicação baseado na racionalidade que visa a obtenção de acordos através da apresentação de explicações e/ou justificações.

Na perspetiva de Wells (2000) as salas de aula devem assumir-se como comunidades de investigação, onde a turma trabalha colaborativamente em torno de um mesmo objetivo, construindo dialogicamente o conhecimento e onde também o professor deve assumir-se como investigador integrante dessa comunidade. O professor, enquanto líder e organizador da comunidade de investigação, não pode evitar a responsabilidade de selecionar atividades que promovam a melhor oportunidade possível para o desenvolvimento individual e social de cada membro da comunidade. De acordo com este autor, os princípios que definem uma sala de aula enquanto comunidade de investigação numa perspetiva dialógica do conhecimento são os seguintes:

– As atividades propostas aos alunos envolvem-nos inteiramente como indivíduos em que encontram um sentido real para a sua participação. Desta forma, a aprendizagem é entendida não como simples aquisição de capacidades ou informações isoladas.

- As atividades são situadas e únicas, situadas no tempo e espaço. As atividades são influenciadas pelos indivíduos particulares que as desenvolvem, pela comunidade em que se inserem, pelas ferramentas que utilizam e pelas suas próprias histórias.
- O currículo é entendido como meio e não como fim. Os saberes e capacidades prescritos no currículo são ferramentas culturais que deverão ser usadas significativamente tanto individual como socialmente.
- Os resultados de uma atividade são tanto planeados como emergentes, pois embora os objetivos da atividade sejam conhecidos, dependem da imprevisibilidade da situação em que ocorrem.
- As atividades devem permitir a diversidade e a originalidade para que promovam o desenvolvimento de cada um dos participantes, individualmente e como comunidade.

Na conceptualização de uma sala de aula enquanto comunidade de investigação, a turma trabalha colaborativamente, o conhecimento é construído dialogicamente e o currículo orientado pela perspetiva investigativa (Wells, 2000).

Por outro lado, Cobb et al. (1997) focam-se na relação entre o discurso de sala de aula e o desenvolvimento matemático dos alunos que nele participam. Consideram particularmente importante o que denominam como "discurso reflexivo" (p. 258), através do qual a atividade matemática é objetivada e se torna um tópico explícito de conversação. Quando os alunos se envolvem no ato coletivo de *discurso reflexivo* estão em condições de realizar aprendizagens matemáticas, e os seus contributos individuais desenvolvem esse discurso, alimentando-o e mantendo-o. Neste tipo de atividade, o papel do professor é particularmente importante porque é ele que "pode proativamente promover o desenvolvimento matemático dos alunos" (p. 269). A relação entre a aprendizagem individual e a coletiva é bastante complexa. Se, por um lado, o desenvolvimento matemático dos alunos emerge a partir das interações e práticas culturais de sala de aula, por outro, "é o aluno individual que tem de refletir e reorganizar-se enquanto participa" (p. 266) no discurso. Desta forma, o *discurso reflexivo* precisa promover tanto a aprendizagem coletiva como a individual e, nesse sentido, o papel do professor tem de atender a essas duas dimensões.

A aula exploratória

A prática de ensino exploratório é uma atividade complexa e considerada como um constante desafio para o professor que a procura implementar (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013; Stein et al., 2008). O PMEB (ME, 2007) procurou proporcionar o enquadramento para uma mudança nas práticas profissionais e, consequentemente, nas aprendizagens matemáticas dos alunos (Ponte & Serrazina, 2009). O programa apresenta diversas orientações metodológicas gerais, destacando a necessidade de propor aos alunos diversos tipos de experiências matemáticas. Refere que "ouvir e praticar são atividades importantes na aprendizagem matemática mas, ao seu lado, o fazer, o argumentar e o discutir surgem com importância crescente nessa aprendizagem" (ME, 2007, p. 8). Nesta perspetiva, este documento curricular acrescenta como objetivos de aprendizagem centrais, e consequentemente como importantes orientações metodológicas, o desenvolvimento das capacidades transversais de comunicação matemática, resolução de problemas e raciocínio matemático.

A principal característica do ensino-aprendizagem exploratório é que promove nos alunos a descoberta e a construção do conhecimento (Ponte, 2005). Para tal, a exploração de tarefas abertas e a gestão que das mesmas se faz na aula, proporcionando aos alunos momentos de discussão entre pares e coletivamente, são oportunidades fundamentais para a construção do conhecimento. No ensino exploratório "a ênfase desloca-se da atividade 'ensino' para a atividade mais complexa 'ensino-aprendizagem'" (Ponte, 2005, p. 13). De acordo com Oliveira et al. (2013), neste tipo de ensino, a aprendizagem é um processo simultaneamente individual e coletivo que resulta da interação dos alunos com o conhecimento matemático e com os outros (colegas e professor), no contexto de desenvolvimento de uma certa atividade matemática e regida por processos de negociação de significados.

No ensino exploratório, os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com as tarefas matemáticas (Canavarro, 2011). De acordo com Canavarro et al. (2012), este tipo de prática "exige do professor muito mais do que a identificação e seleção de tarefas para a sala de aula" (p. 256). Assim, para estes autores, embora a seleção de uma "tarefa adequada e valiosa" (idem) seja particularmente importante, é a sua exploração em sala de aula que permite promover as oportunidades de aprendizagem dos alunos.

Baxter e Williams (1996, cit. em Baxter & Williams, 2010) descrevem o ambiente de sala de aula que promove a construção do conhecimento matemático através da comunicação entre os alunos, estruturado do seguinte modo: (1) as tarefas matemáticas são apresentadas aos alunos; (2) os alunos trabalham na tarefa a pares ou em pequenos grupos, enquanto o professor circula pelos grupos encorajando-os, desafiando-os, questionando-os e dando-lhes sugestões, se necessário; (3) os alunos apresentam as suas resoluções à turma; e (4) o professor sistematiza as apresentações.

Stein et al. (2008) consideram que este tipo de aula é desenvolvido de acordo com as seguintes fases: a fase de "lançamento" da tarefa, a fase de "exploração" pelos alunos, e a fase de "discussão e sintetização". Durante a fase de lançamento da tarefa, o professor introduz o problema aos alunos, as ferramentas disponíveis para trabalhar e a natureza dos produtos que são esperados. Na fase seguinte, de exploração, os alunos trabalham na tarefa, muitas vezes, a pares ou em pequenos grupos, e são encorajados a resolvê-la e a prepararem-se para explicar a sua abordagem à turma. Na fase final, é realizada a discussão coletiva e um sumário/sistematização das diferentes abordagens apresentadas pelos alunos na resolução da tarefa.

Conscientes da dificuldade inerente à implementação da estrutura de uma sala desta natureza, Baxter e Williams (2010) referem que o professor deverá promover suportes sociais que ajudem os alunos a trabalhar em conjunto. Por exemplo, os alunos devem ser encorajados a explicar as suas formas de pensamento e a compreenderem as explicações dos colegas. As regras que conduzem a esta forma de comunicação na sala de aula devem ser explicitamente identificadas e postas em prática até fazerem parte da cultura de sala de aula. À medida que os alunos interiorizam essas regras, assumem um papel de maior responsabilidade no discurso matemático de sala de aula. Estes autores concluem que em salas de aula onde existe esta prática de ensino, os professores falam menos e os alunos mais do que o que seria esperado numa sala de aula de ensino mais tradicional, pois o tempo é organizado de forma que sejam dadas mais oportunidades de comunicação aos alunos, tanto em pequeno grupo como durante a discussão coletiva com toda a turma.

Também Sherin (2002) se refere à dificuldade na criação e manutenção deste tipo de ambiente de aprendizagem, em que se promove *fazer e falar* sobre matemática. Para esta autora, num ambiente de aprendizagem desta natureza convivem duas tensões principais. Por um lado, é esperado dos professores que encorajem os alunos a partilhar as suas ideias e a usarem essas ideias como base de discussão. Por outro lado, é esperado que assegurem que essas discussões sejam matematicamente produtivas. Ou seja, surge uma tensão na tentativa de encontrar um equilíbrio entre ter um ambiente de sala de aula que é aberto às ideias dos alunos e que, simultaneamente, sirva os propósitos de aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Esse desafio pode ser caracterizado como uma tensão entre suportar *o processo do discurso matemático* por um lado, e o *conteúdo do discurso matemático*, por outro (Sherin, 2002). O termo processo refere-se a como o professor e os alunos interagem na discussão – quem fala com quem, de que formas. O conteúdo do discurso, pelo contrário, refere-se à substância matemática subjacente nas ideias, à sua profundidade e complexidade em termos dos conceitos matemáticos em consideração, ou seja, em relação com os objetivos curriculares que o professor estabelece para a aula.

Neste sentido e tendo em conta o complexo desafio de orientar uma turma em torno de uma discussão coletiva que promova aprendizagens matemáticas significativas, Stein et al. (2008) apresentam um modelo composto por cinco práticas para a orquestração de discussões coletivas: (1) antecipação das prováveis respostas dos alunos a tarefas matemáticas cognitivamente exigentes, (2) monitorização do trabalho autónomo dos alunos, (3) seleção das resoluções particulares dos alunos para apresentação durante a discussão coletiva, (4) sequenciar adequadamente as resoluções dos alunos a serem apresentadas, e (5) ajudar a turma a estabelecer conexões matemáticas entre as diferentes resoluções dos alunos e entre ideias chave. Os autores consideram que as discussões coletivas devem ser impulsionadas por tarefas matemáticas cognitivamente exigentes e que o papel que o professor assume deverá permitir a construção de um sentido pessoal e coletivo das ideias matemáticas exploradas na aula. Para isso, as discussões coletivas devem suportar a aprendizagem matemática dos alunos, ajudando-os a aprender o discurso matemático, tornando o seu pensamento público para que possam construir e avaliar as suas ideias matemáticas e as dos outros (Stein et al., 2008).

Canavarro (2011) salienta uma característica importante do ensino exploratório ao referir que o mesmo não deve ser encarado como algo que se experimenta esporadicamente. De facto, este tipo de ensino da matemática precisa de tempo e continuidade para que o professor possa melhorar a sua prática e para que os alunos correspondam e desenvolvam a aprendizagem dos conteúdos matemáticos no contexto da comunidade que integram. Neste sentido, Canavarro (2011) carateriza-o como um desafio que deve ser perseguido de forma continuada. Na experiência de ensino realizada, a prática de ensino-aprendizagem exploratória foi assumida ao longo do estudo e incorporada, de forma gradual, pela investigadora e pelos alunos. Assim, se no início da experiência de ensino, a ação da investigadora era mais diretiva, no sentido de implementar este modelo de aula, à medida que os alunos o incorporavam, esse papel da investigadora foi dando lugar a uma intervenção mais ativa dos alunos. Esta mudança foi particularmente evidente na fase de discussão coletiva. No início da experiência de ensino, os alunos que apresentavam as suas resoluções estavam muito dependentes da aprovação da professora-investigadora e a turma tinha um papel pouco interventivo. Ao longo da experiência de ensino, esses papéis foram-se modificando, salientando-se uma maior participação por parte dos alunos que, genuinamente, queriam partilhar as suas resoluções e fazer-se compreender, e dos que assistiam e, ativamente, manifestavam as dúvidas e questionamentos para entenderem as resoluções apresentadas.

As tarefas matemáticas

A aprendizagem que os alunos fazem está dependente da atividade que realizam e da reflexão que fazem sobre a mesma (Ponte, 2005) e, deste modo, a seleção das tarefas que são trabalhadas em sala de aula deve ter em conta o tipo de atividade que propõe aos alunos. Assim, tarefas que conduzem a procedimentos rotineiros são diferentes de tarefas que exigem aos alunos pensar conceptualmente e que os estimulam a estabelecer conexões (Stein & Smith, 1998).

De acordo com o NCTM (1994), as tarefas matematicamente válidas devem respeitar as seguintes características: apelar à inteligência dos alunos, desenvolver a compreensão e a aptidão matemática, estimular os alunos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas, apelar à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático, promover a comunicação sobre a matemática, mostrar a matemática como uma atividade humana permanente, ter em atenção diferentes experiências e predisposições dos alunos e promover o desenvolvimento da predisposição de todos os alunos para fazer matemática. As tarefas são "um elemento fundamental na caracterização de qualquer currículo, pois elas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos" (Ponte, 2005, p. 23). Stein e Smith (1998) consideram ainda que o tipo de tarefas que os alunos exploram na sala de aula, cumulativamente, dia após dia, conduz ao desenvolvimento de ideias implícitas sobre a natureza da matemática.

Canavarro (2011) refere que, no ensino exploratório, as tarefas devem ser escolhidas criteriosamente de forma a proporcionar aos alunos aprendizagens matemáticas sofisticadas, para além da aplicação de conceitos e do treino de conhecimentos. Deste modo, no ensino exploratório, a seleção das tarefas assume-se como particularmente importante por condicionar a atividade matemática que os alunos vão desenvolver.

Tendo em conta a diversidade de tarefas, elas podem ser classificadas de acordo com duas dimensões: grau de desafio e grau de estrutura (Ponte, 2005). O grau de desafio está relacionado com a dificuldade inerente à sua resolução e o grau de estrutura diz respeito à forma como apresenta os dados e questiona o que é pedido para a sua resolução. Assim, uma tarefa pode ser mais fechada apresentando claramente os dados e o que é pedido, ou mais aberta a diferentes possibilidades de resolução. Tendo em conta estas duas perspetivas, Ponte (2005) apresenta um quadro conceptual orientador para a classificação dos diferentes tipos de tarefas.

Figura 6.1 - Relação entre os diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura, de acordo com Ponte (2005, p. 8).

De acordo com esta classificação, as tarefas exploradas nesta experiência de ensino são maioritariamente problemas e tarefas de exploração. Assim, os problemas, embora com uma estrutura fechada por apresentarem claramente definido o que se pretende que os alunos descubram, podem ter um grau de desafio mais elevado. São exemplos deste tipo de tarefas, na presente experiência de ensino, os problemas que claramente solicitam aos alunos que descrevam as relações numéricas ou funcionais, mas cuja dificuldade de resolução pode ser significativa. As tarefas de exploração podem ser consideradas como tendo um grau de desafio mais reduzido, mas com um caráter mais aberto na forma como apresentam os dados e questionam o que se pretende descobrir. São exemplos destas tarefas, na experiência de ensino, as situações propostas aos alunos para descoberta de regularidades em sequências de múltiplos de um número natural que, embora de dificuldade mais reduzida, têm um caráter mais aberto por permitirem variadas possibilidades de resposta.

Em educação matemática é reconhecido com alguma naturalidade que os contextos das tarefas, nomeadamente dos problemas, desempenham um papel importante na aprendizagem da matemática, especialmente dos alunos dos primeiros anos de escolaridade. O PMEB (ME, 2007) refere a importância dos contextos na resolução de problemas afirmando que, no 1.º ciclo, "os contextos desempenham um papel particularmente importante, em especial os que se relacionam com situações do quotidiano, devendo ser escolhidos de modo cuidadoso uma vez que servem de modelos de apoio ao pensamento dos alunos" (p. 29). Este programa refere ainda que "resolver problemas constitui um ponto de partida para a abordagem de conceitos e ideias matemáticas e funciona como um suporte para o seu desenvolvimento e aplicação" (idem).

De acordo com Borasi (1986) os contextos são descrições de situações em que os problemas matemáticos são envolvidos e cujo objetivo é providenciar informação significativa que ajude na sua resolução. Ponte e Quaresma (2012) entendem o contexto como o "universo experiencial associado a cada tarefa, que pode remeter para um campo da vida quotidiana em que o aluno tem maior ou menor experiência pessoal, ou remeter para o universo matemático" (p. 196). Neste sentido, os contextos podem ser de realidade, semi-realidade ou de matemática pura (Skovsmose, 2001; Ponte, 2005).

Gravemeijer e Doorman (1999) sugerem a denominação de *problemas contextualizados* para problemas cujas situações são experienciadas como realistas para os alunos. Desta forma, um problema de contexto marcadamente matemático pode ser considerado como problema contextualizado desde que os alunos o experienciem como real. Na Matemática Realista os problemas contextualizados são usados como fonte para a atividade de reinvenção da matemática, funcionando também como ponte de passagem das estratégias informais para as formais. Estes autores referem, ainda, que à medida que os alunos experimentam o processo de reinventar a matemática através da resolução de problemas contextualizados, para além de desenvolverem os seus conhecimentos matemáticos, também expandem a sua compreensão do mundo real, existindo aqui uma relação reflexiva entre a utilização de problemas contextualizados e a própria apreensão da realidade. Por um lado, os problemas contextualizados têm raízes nessa realidade, por outro, a resolução desses problemas ajuda os alunos a expandirem a sua própria noção de realidade.

Os contextos dos problemas podem ter um papel motivador por permitirem ao aluno apropriar-se do problema, encarando-o como um desafio para resolver. Embora reconhecendo o papel importante da motivação para a aprendizagem, Ponte e Quaresma (2012) referem que mais do que isso, o contexto deve ser um suporte para a aprendizagem matemática. De acordo com Palm (2009), o contexto deverá constituir-se como favorável à aprendizagem, estimulando a interação construtiva entre os alunos, orientada, naturalmente, pelo professor.

As tarefas exploradas nesta experiência de ensino têm como objetivo geral proporem situações que mobilizem os alunos na expressão e representação da generalização através de situações que exploram contextos de promoção dos pensamentos relacional e funcional. Estes contextos pretendem ser realistas para os alunos na aceção de Gravemeijer e Doorman (1999) relativamente aos problemas contextualizados, ou seja, pretende-se que sejam experienciados por estes como reais, impelindo-os ativamente à sua resolução. Pretende-se ainda que as tarefas propostas se constituam como fatores de motivação ao permitirem aos alunos apropriarem-se do seu enunciado, tomando-o como um desafio que querem resolver.

Em suma, a seleção/construção e sequenciação das tarefas exploradas nesta experiência de ensino basearam-se na conjetura de que os contextos de promoção dos pensamentos relacional e funcional seriam apropriados para o desenvolvimento do pensamento algébrico, ao promoverem a expressão e representação da generalização, de forma gradualmente mais simbólica, através da exploração de situações contextualizadas. A importância de um modelo de natureza dialógica e exploratória para a exploração das tarefas em sala de aula foi assumido como determinante para a concretização dos objetivos da experiência de ensino. As sequências de tarefas desta experiência de ensino são descritas na secção 6.3 deste capítulo.

6.2 Diagnóstico sobre a capacidade de generalização dos alunos

Com a aplicação do teste de diagnóstico (Anexo 2) pretendia-se recolher dados que permitissem caracterizar a forma como os alunos resolviam problemas de generalização, antes da experiência de ensino. Tendo em conta o trabalho realizado com a turma no ano letivo anterior, no âmbito da implementação do PMEB (ME, 2007), nomeadamente ao nível da resolução de problemas e da exploração de tarefas de descoberta de regularidades numéricas, pretendia-se perceber se os alunos já evidenciavam algumas capacidades de generalização na resolução das tarefas do teste de diagnóstico. A decisão pela realização deste teste ancorava-se também na perspetiva de Mason (1996) ao considerar que os alunos possuem um poder natural de generalização e que seria importante conhecer para planear a experiência de ensino.

Baseando-se nos aspetos já referidos da dimensão de conteúdo da conjetura que orientou esta experiência de ensino, pretendia-se perceber como os alunos, na resolução do teste de diagnóstico, expressavam e representavam a generalização em tarefas com contextos que promoviam o pensamento relacional e o pensamento funcional. Assim, no respeitante ao pensamento relacional foram apresentadas situações relativas à exploração de igualdades envolvendo as propriedades das operações. As situações relativas ao pensamento funcional exploravam sequências pictóricas crescentes, envolvendo a identificação de variáveis e das suas relações.

Para obter uma compreensão geral relativamente à capacidade de generalização dos alunos optou-se por analisar três das questões do teste: questões 1, 4 e 5. Esta opção justifica-se pelo conjunto de dados resultante dessas questões ser suficiente para traçar o diagnóstico da turma quanto à capacidade de generalização, antes da experiência de ensino, sendo que as restantes questões do teste não acrescentavam nova informação. Os objetivos para cada uma das questões do teste analisadas estão assinalados no Quadro 6.2.

Quadro 6.2 – Descrição e objetivos das questões do teste de diagnóstico analisadas.

<table>
<tr><th>Questões</th><th>Descrição</th><th>Objetivos</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Expressões numéricas envolvendo as propriedades das operações.</td><td>- Classificar como verdadeiras ou falsas cada uma das expressões numéricas.
- Enunciar propriedades das operações como forma de justificação da opção V/F.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Sequência pictórica crescente (regra geral: $n + 1$)</td><td rowspan="2">- Identificar os termos próximos da sequência (generalização próxima).
- Identificar termos mais distantes da sequência (generalização distante).
- Identificar uma regra geral de generalização da estrutura da sequência.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Sequência pictórica crescente (regra geral: $2n + 2$)</td></tr>
</table>

A análise dos dados do teste iniciou-se por uma análise de natureza quantitativa em que foram contabilizadas as respostas corretas e as incorretas. Em seguida, procedeu-se também a uma análise quantitativa, confrontando o número de respostas corretas nas questões que solicitavam uma justificação e o número de justificações que evidenciavam alguma capacidade de generalização.

Posteriormente, foi feita uma análise qualitativa dos dados em que se relacionaram as respostas ao teste escrito com excertos de entrevistas a alguns alunos da turma, como foi referido no capítulo referente à metodologia. A realização destas entrevistas tinha como principal propósito aceder a uma maior compreensão sobre as resoluções dos alunos, dificuldades encontradas e capacidade de generalização evidenciada.

A Figura 6.2 apresenta o número de respostas corretas dos alunos às diferentes questões do teste, em análise.

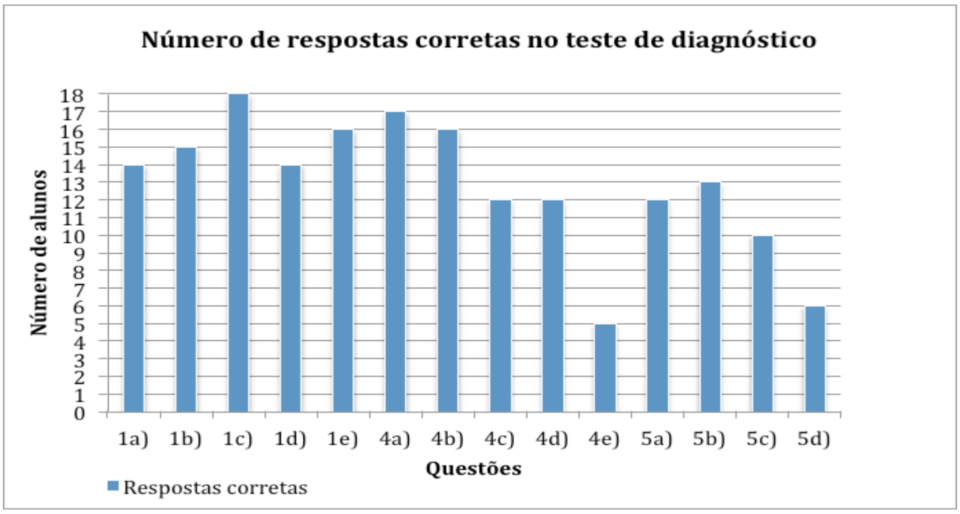


Figura 6.2 – Número de respostas corretas no teste de diagnóstico.

Como a leitura do gráfico evidencia, mais de metade dos alunos da turma respondeu corretamente a todas as questões do teste, à exceção das questões 4e) e 5d). As questões onde os alunos obtiveram melhor desempenho foram as relativas às propriedades das operações (questão 1). Nestas questões os alunos conseguiram identificar as expressões numéricas verdadeiras e as falsas, com alguma facilidade. Nas questões relativas à exploração de sequências pictóricas crescentes, os alunos evidenciaram maior facilidade nas perguntas que pediam generalizações próximas (4a), 4b), 5a) e 5b)), como é natural. A questão que envolvia explicitamente a formulação de uma regra geral, "Explica como podes descobrir o número de molas necessárias para pendurar qualquer quantidade de desenhos" (questão 4e)), foi aquela onde os alunos revelaram maiores dificuldades. Também na questão 5d), a maior parte dos alunos revelou dificuldades. Esta era uma questão que pedia, implicitamente, a utilização da apreensão da estrutura da sequência para verificar a validade de uma afirmação.

De forma a aprofundar a compreensão relativamente à capacidade de generalização dos alunos, fez-se o confronto entre o número de respostas corretas nas questões que solicitavam uma justificação e o número de justificações que evidenciavam alguma capacidade de generalização (Figura 6.3).

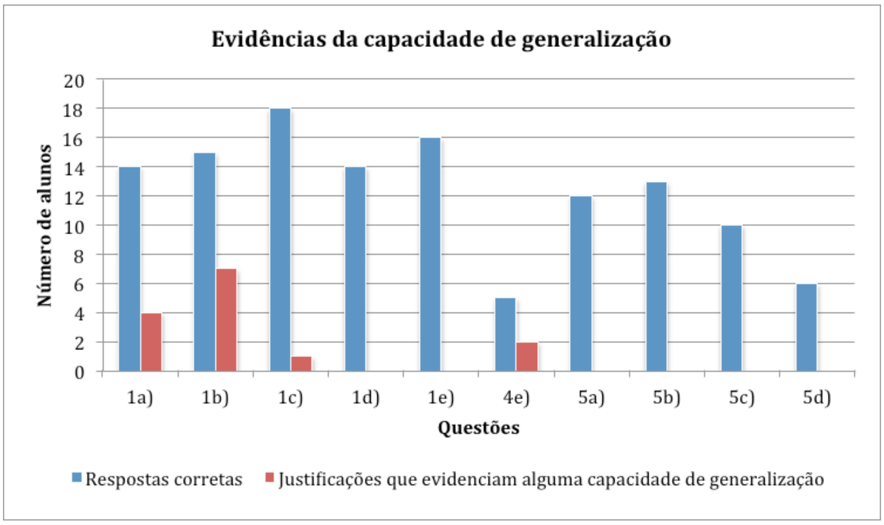


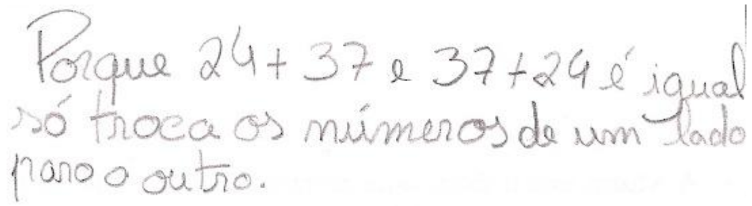
Figura 6.3 – Evidências da capacidade de generalização dos alunos no teste de diagnóstico.

Pela análise geral do gráfico é evidente que apenas uma pequena parte dos alunos conseguiu justificar as suas respostas com a expressão de alguma generalidade. Nas questões relativas às propriedades das operações, alguns alunos conseguiram justificar a sua opção pelo V/F com a expressão, mesmo informal, da generalização que traduzisse a propriedade em causa. Nas questões que apresentavam sequências pictóricas crescentes, apenas dois alunos conseguiram enunciar a regra geral da sequência apresentada na questão 4e).

Em seguida, analisam-se algumas respostas dos alunos relativamente a cada uma das expressões numéricas apresentadas na questão 1. A análise das respostas escritas dos alunos ao teste de diagnóstico é completada com pequenos excertos das entrevistas realizadas.

Questão 1a): 24+37=37+24

Nesta questão, relativa à propriedade comutativa da adição, apenas quatro alunos conseguiram referir, mesmo de modo informal ou incompleto, essa propriedade. A resposta seguinte é um exemplo de uma justificação considerada, no momento, como evidência de alguma capacidade de generalização da propriedade em questão.


Porque 24+37 e 37+24 é igual só troca os números de um lado para o outro.

Porque 24+37 e 37+24 é igual, só troca os números de um lado para o outro.

Figura 6.4 – Justificação da questão 1a) do teste de diagnóstico feita pelo Fábio.

Na situação de entrevista a respeito desta questão, Fábio refere não ter feito a "conta" porque "só muda a ordem dos números", revelando que reconhece que o pode fazer na adição, sem que isso altere o resultado. No entanto, quando questionado sobre se isso acontecia igualmente na subtração, Fábio revelou algumas dificuldades:

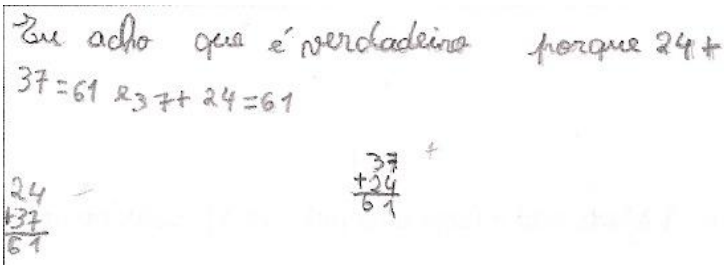
> Investigadora – E se em vez de fazer uma adição, fizer uma subtração, colocar sinais de menos onde estão os sinais de mais.
> Fábio – 24 menos 37 e 37 menos 24?
> Investigadora – Sim. Continua a ser verdadeira a igualdade?
> Fábio – É a mesma coisa.
> Investigadora – É verdadeira à mesma?
> Fábio – É.

Matilde, como Fábio, consegue justificar a veracidade da expressão numérica 24+37=37+24 com alguma generalidade da propriedade comutativa da adição, referindo: "Porque dá o mesmo resultado, só muda a posição da conta". Quando, na entrevista, é questionada sobre a aplicação dessa propriedade a outras operações, Matilde não revelou grandes dificuldades.

> Investigadora – E se em vez de ter uma adição, tivesse uma subtração, fossem sinais de menos, achas que isso continuaria a ser verdade?
> Matilde – Não.
> Investigadora – Dá um exemplo usando uma subtração.
> Matilde – 23 não dá para ser menos que 51 porque 51 é maior.
> Investigadora – Então e na multiplicação?
> Matilde – Acho que é.
> Investigadora – Faz um exemplo que mostre isso.
> Matilde escreve $17 \times 39 = 39 \times 19$.
> Investigadora – Como sabes que isso é verdade? Fizeste essas contas?
> Matilde – Não fiz as contas, mas pondo o 17 em cima e o 39 em baixo ou pondo o 39 em cima e o 17 em baixo, acho que fica igual.

Embora Matilde e Fábio sejam considerados, pela professora titular da turma, alunos com bons desempenhos na área de Matemática, parecem revelar um raciocínio muito centrado nos procedimentos. As justificações das suas respostas são, quase exclusivamente, baseadas nos procedimentos que usam para resolver os algoritmos.

Dos restantes 10 alunos que consideraram corretamente a expressão numérica como verdadeira, nenhum conseguiu enunciar, ainda que de modo informal, a propriedade comutativa da adição e as suas justificações mostram a opção por procedimentos de cálculo. A resposta seguinte é um exemplo deste tipo de resolução.



Eu acho que é verdadeiro porque 24+37=61 e 37+24=61.

Figura 6.5 – Justificação da questão 1a) do teste de diagnóstico, feita pelo Gonçalo.

O excerto da entrevista a Rita, uma das alunas que mostrou este tipo de procedimento, é exemplificativo da forma como estes alunos pensaram para avaliar a veracidade da expressão numérica.

> Rita – Primeiro tentei fazer a conta e fiz 24+37 e deu 61. E 37+24 dá a mesma coisa.
> Investigadora – Mas não fizeste a conta de 37+24 porquê?
> Rita – Eu fiz, só que apaguei.
> Investigadora – E se não fosse possível fazer a conta?
> Rita – Fazia deitado.

Rita revela, assim, que precisaria sempre conhecer o resultado de cada uma das “contas” para avaliar a veracidade da expressão numérica. Quando refere que se não fizesse a “conta”, faria “deitado”, Rita refere-se à resolução da operação na representação horizontal. Também esta aluna considera que, caso a expressão numérica fosse relativa à subtração, continuaria a ser verdadeira.

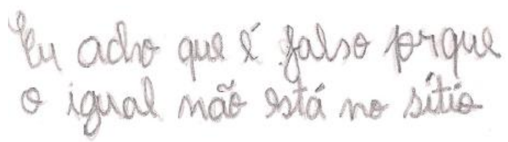
> Investigadora – E se em vez de ter o sinal de mais, tivesse um sinal de menos, continuaria a ser verdadeira?
> Rita – Aí, se calhar, a conta já seria diferente.
> Investigadora – Seria verdadeira ou falsa?

Rita – Falsa.
Investigadora – Porquê?
Rita – Então porque se aqui está uma de menos e aqui uma de mais…
Investigadora – Não, se estivesse dois sinais de menos, em vez dos de mais.
Rita – Aí continuaria a ser verdadeira.
(Rita resolve o algoritmo $37 - 24$ e depois tenta resolver $24 - 37$, mas desiste.)
Investigadora – Por que é que não fizeste $24 - 37$?
Rita – Porque assim a conta não ia dar certa.
Investigadora – Porquê?
Rita – Porque os números maiores têm de ser sempre em cima.

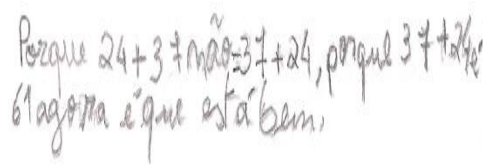
Rita demonstra como o seu raciocínio está dependente da realização dos algoritmos. De facto, até a sua justificação “os números maiores têm de ser sempre em cima” mostra que se centra no procedimento para considerar a sua resposta.

Com estas resoluções e as suas explicações, estes alunos deixam antever uma possível conceção do sinal de igual muito dependente do cálculo, não revelando que pensam de forma relacional nestas questões.

Também os quatro alunos que consideraram incorretamente a expressão numérica como falsa revelaram uma conceção do sinal de igual muito restrita, não aceitando a forma $a + b = b + a$ da expressão. Os exemplos seguintes revelam que, também estes alunos consideram o sinal de igual como indicação para uma resposta numérica.



Eu acho que é falso porque o igual não está no sítio.



Porque 24+37 não é 37+24, porque 37+24 é 61 agora é que está bem.

Figura 6.6 – Justificação da questão 1a) do teste de diagnóstico, feita pelo Henrique (à esquerda) e pelo António (à direita).

É bastante evidente que estes dois alunos consideram o sinal de igual como um símbolo operacional, ou seja, um comando para dar uma resposta às operações presentes no lado esquerdo da igualdade. Henrique refere que o sinal de igual “não está no sítio” e António propõe como forma correta $37 + 34 = 61$, revelando assim não aceitar a forma $a + b = b + a$. Na entrevista, Elisabete é bastante explícita quando refere que a expressão “não é normal”.

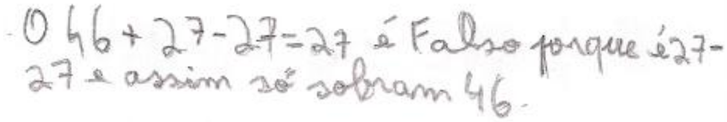
Investigadora – Tu disseste que era falsa. Porquê?

Elisabete – Porque não é verdade porque não pode dar o mesmo, se nós fizermos a conta, não pode dar o mesmo. Assim, não é normal.
Investigadora – Achas que não é normal?
Elisabete – Não, não é normal.
Investigadora – Então, como é que seria normal?
Elisabete – Acho que devia estar $24 + 37$ e depois devia dar um resultado.
Investigadora – Devia dar um resultado logo, era?
Elisabete – Sim.

Questão 1b): $\boldsymbol{46 + 27 - 27 = 27}$

Nesta questão 15 alunos consideraram, corretamente, que a expressão era falsa e sete conseguiram justificar a sua opção sem recorrer ao cálculo. Estes alunos reconheceram, informalmente, que a existência dos elementos simétricos "a" e "$-a$" lhes permitia identificar a veracidade da expressão numérica sem a calcular. Considera-se, assim, que mesmo de forma muito vaga, estes alunos revelaram algum sentido da generalidade da propriedade $a + b - b = a$.

O exemplo seguinte mostra como João P., sem efetuar qualquer cálculo, considera a importância de "$27 - 27$" na expressão. Ao referir que "só sobram 46", o aluno, de modo muito pouco explícito, parece perceber como a adição e a subtração do mesmo número contribui para esse resultado.



O $46 + 27 - 27 = 27$ é falso porque é $27 - 27$ e assim só sobram 46.

Figura 6.7 – Justificação da questão 1b) do teste de diagnóstico, feita pelo João P.

Em situação de entrevista, João P. explica a forma como pensou. Confirma, então, que adicionar 27 e "tirar logo" 27 contribui para que a soma seja 46. No entanto, o aluno nunca menciona que isso seja equivalente a adicionar zero.

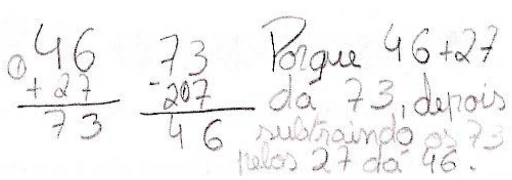
João P – Porque aqui estava 46 mais 27, e depois tirava logo o 27, então ficava 46. E se ficava 46 não podia dar 27.
Investigadora – Então, pôr 27 e tirar 27, vai dar quanto?
João P. – 46.
Investigadora – Vai dar 46. Porque aqui é como se estivesse quanto?
João P. – Porque aqui eles metem 46 mais 27 e depois tiram logo aqui o 27.

Outro aluno, Henrique, que na resposta anterior tinha considerado que o sinal de igual "não esta[va] no sítio", na entrevista sobre a resolução desta expressão refere não precisar fazer "a conta" porque o sinal de igual "está no sítio certo". Reconhece também que $46 + 27 - 27$ não poderia ser igual a 27.

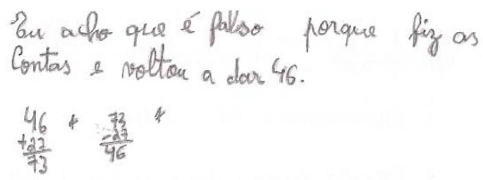
Também Matilde não precisou efetuar cálculos para reconhecer que a expressão numérica era falsa. Na justificação dada no teste de diagnóstico refere: "Porque o número 46 voltou a ser o resultado". Em situação de entrevista refere que "46 mais 27 dá um número", não precisando identificar qual seria o número, pois isso não era importante para analisar a veracidade da expressão. Quando questionada, a aluna reconhece que $27 - 27$ equivale a zero.

> Matilde – Porque 46 mais 27 dá um número e depois menos 27 dá 46, e aqui está que ia dar 27, mas não é, é 46 outra vez.
> Investigadora – Quando tu estás a adicionar 27 e a seguir retirar 27, é a mesma coisa que estarmos a fazer o quê?
> Matilde – Era o mesmo que não fizéssemos nada.
> Investigadora – Era a mesma coisa que estarmos a acrescentar quanto?
> Matilde – Nada. Zero.

Dos restantes oito alunos que consideraram corretamente a expressão como falsa, cinco precisaram resolver a operação para justificar a sua opção. As resoluções dos alunos seguintes são exemplos desse procedimento.



Porque 46+27 dá 73, depois subtraindo os 73 pelos 27 dá 46.



Eu acho que é falso porque fiz as contas e voltou a dar 46.

Figura 6.8 – Justificação da questão 1b) do teste de diagnóstico, feita pelo Fábio (à esquerda) e pelo Gonçalo (à direita).

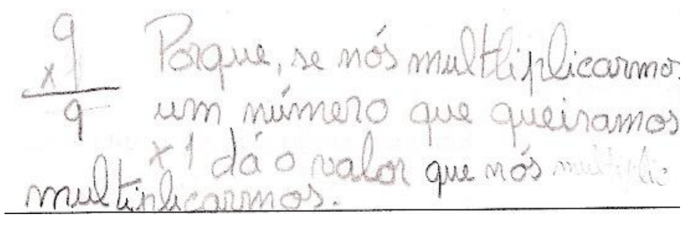
Embora os alunos possam querer demonstrar a validade da sua resposta através da apresentação de algoritmos e cálculos, tendo em conta que esse pode ser um procedimento reconhecido em situação normal de avaliação, Gonçalo reconhece na situação de entrevista que precisou de fazer o cálculo para saber se a expressão era verdadeira ou falsa.

Questão 1c): $\clubsuit \times 1 = \clubsuit$

Esta questão introduzia um símbolo não numérico e foi explicado aos alunos que este representava “qualquer número”. Apesar de ser o primeiro contacto com um símbolo não numérico, todos os alunos conseguiram assinalar corretamente a expressão como verdadeira. Relativamente à utilização do símbolo não numérico, Matilde, em situação de entrevista esclarece como interpretou o seu significado.

> Matilde – Aqui podia ser um número qualquer, um número que nós inventássemos, que ia dar o número certo aqui…
> Investigadora – O número que nós inventássemos…?
> Matilde – Que ia dar aqui o número que inventássemos…
> Investigadora – Se fosse o número cinco, cinco vezes um é igual a...
> Matilde – Cinco.
> Investigadora– E isso é verdade com todos os números ou não?
> Matilde – Sim.
> Investigadora – E como é que podemos dizer isso de forma clara… quando multiplicamos um número por um…
> Matilde – Dá sempre esse número.

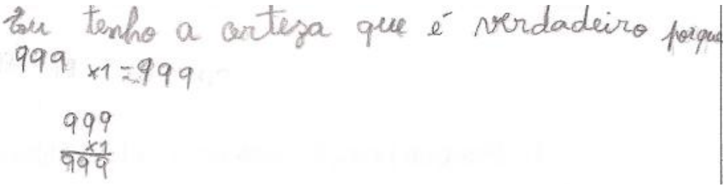
Esta aluna conseguiu, assim, na situação de entrevista e com alguma ajuda da investigadora, enunciar de uma forma geral a propriedade. De facto, no teste escrito, apenas um aluno, Fábio, conseguiu expressar com alguma generalidade a propriedade de existência do elemento neutro da multiplicação. O aluno descreve essa propriedade com alguma clareza, embora, naturalmente, em linguagem pouco formal. Apesar de ser claro nessa descrição, o aluno sente necessidade de usar um exemplo, fazendo $9 \times 1 = 9$ através do algoritmo.



Porque se nós multiplicarmos um número que queiramos $\times 1$ dá o valor que nós multiplicarmos.

Figura 6.9 – Justificação da questão 1c) do teste de diagnóstico, feita pelo Fábio.

Oito alunos justificam a sua resposta usando um como exemplo, fazendo $1 \times 1 = 1$. Outros alunos usam outros exemplos. Gonçalo usa um “número grande”. Parece que este aluno pretende mostrar a generalidade da propriedade através de um número que considera ser grande o suficiente para abarcar todos os casos. Na entrevista, é-lhe proposto que escolha outro número e Gonçalo fá-lo e refere que “dá para todos os números que forem multiplicados por um”. Este aluno apresenta a multiplicação por um usando simultaneamente a representação do algoritmo na horizontal e na vertical.

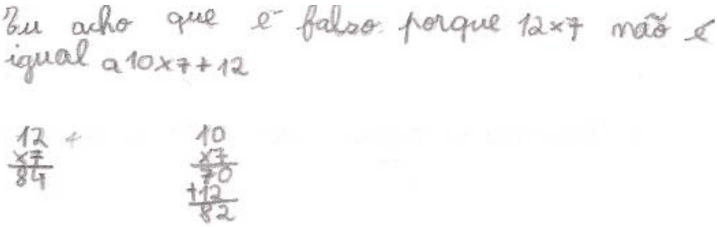


Eu tenho a certeza que é verdadeiro porque $999 \times 1 = 999$.

Figura 6.10 – Justificação da questão 1c) do teste de diagnóstico, feita pelo Gonçalo.

Questão 1d): $\mathbf{12 \times 7 = 10 \times 7 + 12}$

Nesta questão 14 alunos consideraram corretamente a expressão numérica como falsa. No entanto, nenhum aluno relacionou esta expressão com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Nove alunos usaram o cálculo para justificar as suas respostas, como mostra a resolução seguinte.



Eu acho que é falso porque 12×7 não é igual a $10 \times 7 + 12$.

Figura 6.11 – Justificação da questão 1c) do teste de diagnóstico, feita pelo Gonçalo.

Fábio mostra na entrevista como usou o cálculo para responder.

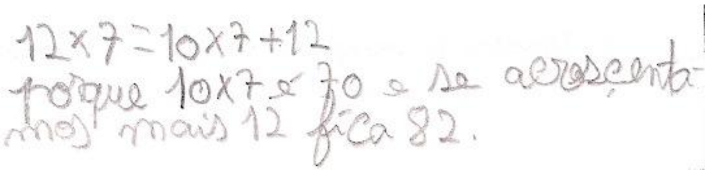
Fábio – É falsa.
Investigadora – Porque é que dizes que é falsa? Estou a ver que fizeste aí continhas…
Fábio – Sim. Porque eles dizem que 12×7 é igual a $10 \times 7 + 12$, mas se nós multiplicarmos 12×7 dá 84 e se nós multiplicarmos 10×7 dá 70 mais os 12 dá 82.

João V., na entrevista, explica como a expressão numérica ficaria verdadeira. A opção pelo procedimento de cálculo impede o aluno de relacionar os dois lados da igualdade, não reconhecendo que 14 equivale a 2×7, e limitando, assim, o reconhecimento da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Investigadora – Como é que ficaria igual? Como é que poderia pôr para ser verdadeiro? 12×7 igual a 10×7 mais quanto?
João V. – Mais 14.
Investigadora – E porquê 14?
João V. – Porque do 70 para dar 84 é preciso o 14.

Os alunos que incorretamente classificaram a expressão numérica como verdadeira também usaram o cálculo. No entanto, apresentaram erros ou enganos que condicionaram a sua resposta.

A resolução de Diogo mostra como o aluno também usou o cálculo, mas apenas num dos lados da igualdade, não resolvendo 12×7. Desta forma, o aluno assumiu que a expressão numérica era verdadeira.



$12 \times 7 = 10 \times 7 + 12$
porque 10×7 é 70 e se acrescentássemos mais 12 fica 82.

Figura 6.12 – Justificação da questão 1c) do teste de diagnóstico, feita pelo Diogo.

Também Henrique volta a referir (como havia feito na questão 1a)) que “o sinal não está no sítio”, revelando, mais uma vez, a não aceitação de uma forma diferente da expressão $a + b = c$. Outro aluno, Marco, mostra, de forma muito explícita, na entrevista, que também não aceita expressões numéricas escritas na forma apresentada.

Marco – Porque aqui não dá o mesmo resultado que dá aqui. Aqui é 12×7 e aqui está 10×7 e depois mais 12. Aqui não dá para fazer uma conta.
Investigadora – Não? Porquê? Porque é que não dá?
Marco – Porque aqui está 12×7 e aqui está 10×7 e depois mais 12 e depois o mais não dá porque é de vezes.
Investigadora – Então como está aqui o mais e o vezes não dá para fazer a conta, é isso?
Marco – Sim.

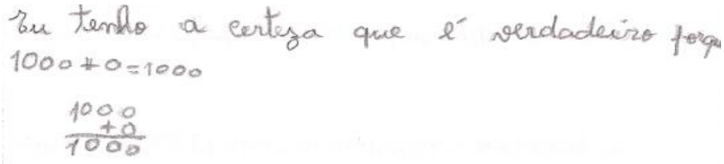
Marco considera, assim, que “não dá para fazer a conta” devido à existência das duas operações, multiplicação e adição, na mesma expressão numérica. Também Elisabete refere isso, considerando-o estranho.

Elisabete – Porque 12×7 dá um resultado e não podia ser $10 \times 7 + 12$. É estranho.
Investigadora – Porquê? O que achas estranho aí?

> Elisabete – É estranho porque não podia ser, porque 10×7 e depois mais 12 não ia dar certo.

Questão 1e): ♠+0=♠

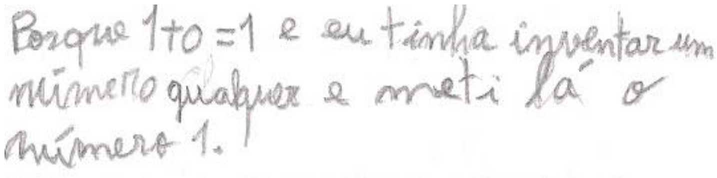
Dezasseis alunos consideram corretamente a expressão numérica como verdadeira. No entanto, nenhum aluno justifica com evidência da apreensão de alguma generalidade da propriedade de existência do elemento neutro da adição. Treze alunos justificam usando um exemplo. Desses 13 alunos, três usam o zero e Gonçalo volta a empregar um "número grande" (1000) como exemplo.



Eu tenho a certeza que é verdadeiro porque 1000+0=1000.

Figura 6.13 – Justificação da questão 1e) do teste de diagnóstico, feita pelo Gonçalo.

António refere que "tinha de inventar um número qualquer" para substituir o símbolo.



Porque $1 + 0 = 1$ e eu tinha [de] inventar um número qualquer e meti lá o número 1.

Figura 6.14 – Justificação da questão 1e) do teste de diagnóstico, feita pelo António.

João V. usa o zero como exemplo, fazendo $0 + 0 = 0$. Na entrevista foi pedido ao aluno para usar outros exemplos e verificar se a expressão continuaria verdadeira. O aluno reconheceu que a expressão numérica continuaria verdadeira usando qualquer número.

> Investigadora – E se tivesses escolhido outro número, seria diferente?
> João V. – Não.
> Investigadora – Então dá outros exemplos.
> João V. – Um mais zero é igual a zero, dois mais zero é igual a zero, cinco mais zero é igual a zero.
> Investigadora – Então dá para qualquer número?
> João V. – Dá.

Questão 4e)

A quarta questão do teste de diagnóstico explorava uma sequência pictórica crescente, como se verifica na figura 6.15. As primeiras duas questões pediam termos muito próximos da sequência (5.º e 6.º), a terceira questão pedia o décimo termo e a quarta questão, um termo mais distante, o centésimo. Quase todos os alunos responderam corretamente às primeiras duas questões (17 e 16, respetivamente) e mais de metade dos alunos (12) apresentou respostas corretas nas outras duas.

Na aula do Frederico os alunos estiveram a pintar desenhos com guaches. Para secarem, a professora pendurou-os com molas numa corda, como se vê na figura seguinte.

a. Quantas molas foram necessárias para pendurar os 5 desenhos? __________

b. E se fossem 6 desenhos, quantas molas precisaria? ________

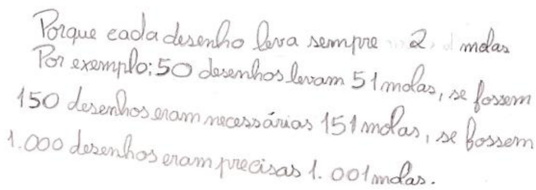
c. E se fossem 10 desenhos, quantas seriam as molas? ________

d. E se fossem 100 desenho, quantas seriam as molas? _______

e. Explica como podes descobrir o número de molas necessário para pendurar qualquer quantidade de desenhos.

Figura 6.15 – Enunciado da questão 4 do teste de diagnóstico.

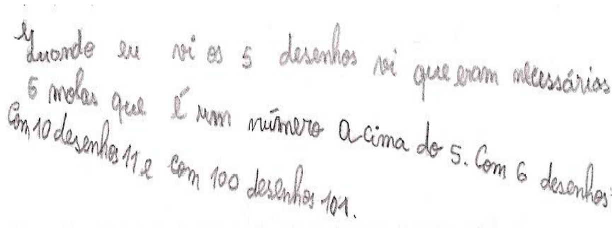
Na questão 4e) era solicitado aos alunos que descobrissem o número de molas necessário para pendurar qualquer quantidade de desenhos. Nessa questão apenas cinco alunos responderam corretamente. Desses cinco, três apresentaram exemplos que evidenciavam terem percebido a estrutura de formação da sequência.



Porque cada desenho leva sempre 2 molas. Por exemplo: 50 desenhos levam 51 molas, se fossem 150 desenhos eram necessárias 151 molas, se fossem 1000 desenhos eram precisas 1001 molas.

Figura 6.16 – Resolução da questão 4e) do teste de diagnóstico, feita pelo Fábio.

Fábio apresenta vários exemplos de termos distantes da sequência e parece reconhecer a sua estrutura, embora não a enuncie. Só na situação de entrevista é que o aluno enuncia, de forma explícita, a regra geral, referindo "É sempre mais uma mola do que os desenhos". Também Gonçalo usa exemplos na sua resposta escrita do teste de diagnóstico. Mas, este aluno refere, no caso dos cinco desenhos, que o número de molas "é um número acima", mostrando a apreensão de uma relação recursiva e a emergência da escrita de uma regra.



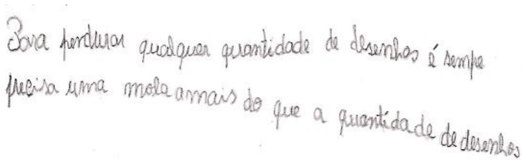
Quando eu vi os 5 desenhos vi que eram necessárias 6 molas que é um número acima do 5. Com 6 desenhos 7. Com 10 desenhos 11 e com 100 desenhos 101.

Figura 6.17 – Resolução da questão 4e) do teste de diagnóstico, feita pelo Gonçalo.

Na entrevista, Gonçalo mostra como conseguiu apreender a estrutura da sequência, enunciando, nessa altura, a formulação da regra "é sempre mais uma mola".

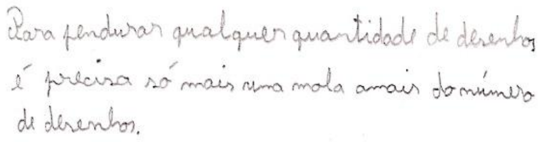
> Gonçalo – Se fossem seis desenhos, contei e imaginei que aqui estava mais uma mola para pegar. E depois pensei bem e pensei que era sempre mais uma mola do que o que já estava nos desenhos.
> Investigadora – Então chegaste aí a uma regra?
> Gonçalo – Sim, então nos 10 desenhos são 11 molas, nos 100 desenhos são 101 molas.
> Investigadora – Então, e se forem 500 desenhos?
> Gonçalo – 501 molas. É sempre mais uma mola.

As duas resoluções seguintes, apresentadas no teste de diagnóstico, mostram, de forma mais explícita, a regra geral da sequência, registando-a em linguagem natural. Estas duas alunas relacionam o número de desenhos (variável independente) com o número de molas (variável dependente), identificando a forma como um depende do outro: "é sempre precisa uma mola a mais do que a quantidade de desenhos" (Beatriz) e "é precisa só mais uma mola a mais do número de desenhos" (Matilde).



Para pendurar qualquer quantidade de desenhos é sempre precisa uma mola a mais do que a quantidade de desenhos.

Figura 6.18 – Resolução da questão 4e) do teste de diagnóstico, feita pela Beatriz.



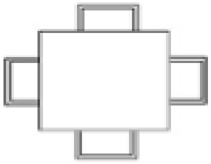
Para pendurar qualquer quantidade de desenhos é precisa só mais uma mola a mais do número de desenhos.

Figura 6.19 – Resolução da questão 4e) do teste de diagnóstico, feita pela Matilde.

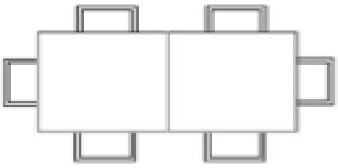
Questão 5

A quinta e última questão em análise, também reporta uma situação envolvendo uma sequência pictórica crescente. Como nas respostas a esta questão são percetíveis as estratégias de resolução dos alunos, adota-se o quadro de análise de Lannin, Barker e Townsend (2006) para sua análise. Desta forma, as estratégias de resolução da sequência são categorizadas como: estratégias recursivas, de partição, de objeto inteiro e explícitas.

A mãe da Marta trabalha num restaurante. O chefe pediu-lhe que organizasse mesas para um jantar com 14 pessoas. A mãe da Marta começou a colocar as mesas quadradas e reparou que numa mesa poderiam estar sentadas 4 pessoas.



Se juntasse 2 mesas, poderia sentar 6 pessoas.



a. Seguindo a mesma regra, quantas pessoas poderia sentar se juntasse 4 mesas em fila? Mostra como encontraste a resposta.
b. Para sentar as 14 pessoas que iam jantar, quantas mesas precisaria juntar a mãe da Marta? Mostra como encontraste a resposta.
c. Consegues descobrir quantas pessoas poderiam sentar-se se a mãe da Marta juntasse 20 mesas? Explica como pensaste.
d. O patrão da mãe da Marta disse que estavam sentadas 33 pessoas no restaurante e que estavam organizadas 15 mesas. A mãe da Marta disse que isso não era possível. Por que razão a mãe da Marta terá referido isso?

Figura 6.20 – Enunciado da questão 5 do teste de diagnóstico.

Questão 5a)

Na primeira questão 12 alunos responderam corretamente, indicando que em quatro mesas poderiam sentar-se dez pessoas. Todos os alunos apresentaram uma resposta certa usaram uma estratégia recursiva, através do desenho e contagem. A resolução seguinte é um exemplo dessa estratégia.

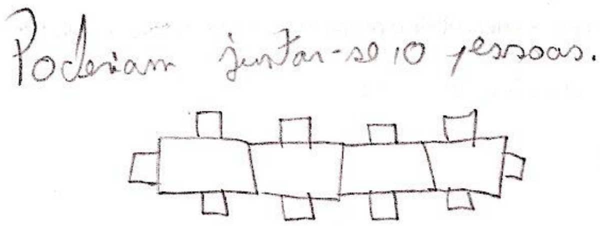
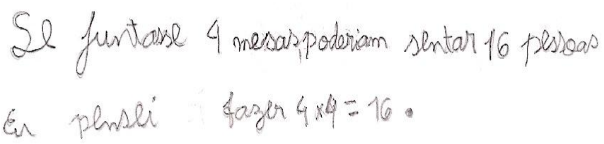


Figura 6.21 – Resolução da questão 5a) do teste de diagnóstico, feita pelo Miguel.

Quatro dos alunos que não conseguiram responder corretamente usaram também a mesma estratégia recursiva, mas enganaram-se na contagem. Os restantes dois alunos usaram uma estratégia de objeto inteiro, encarando a situação como um caso de proporcionalidade direta. A figura seguinte mostra a resolução de Lawry que multiplicou o número de mesas (4) pelo número de lugares de uma mesa (4), não considerando a estrutura espacial da sequência (e consequentemente, a numérica) que juntava as mesas em fila.

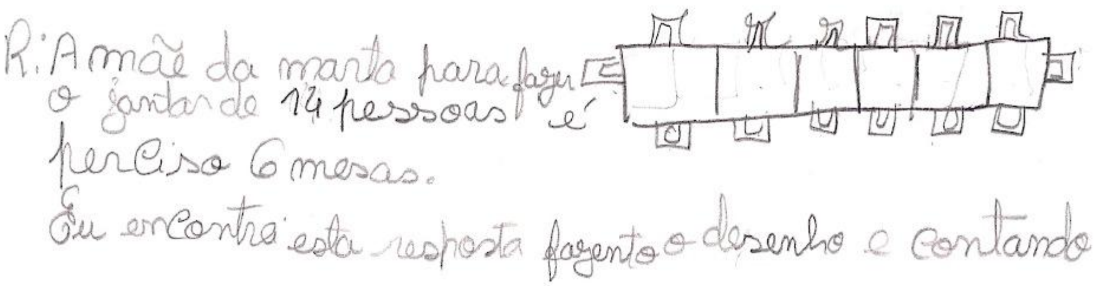


Se juntasse 4 mesas, poderiam sentar 16 pessoas.
Eu pensei fazer $4 \times 4 = 16$.

Figura 6.22 – Resolução da questão 5a) do teste de diagnóstico, feita pela Lawry.

Questão 5b)

Na questão 5b) era perguntado aos alunos quantas mesas precisariam para sentar 14 pessoas. Treze alunos responderam, corretamente, seis mesas, usando uma estratégia recursiva, através do desenho e contagem. A resolução de Carolina é um exemplo da utilização dessa estratégia.



A mãe da Marta para fazer o jantar de 14 pessoas é preciso 6 mesas.
Eu encontrei esta resposta fazendo o desenho e contando.

Figura 6.23 – Resolução da questão 5b) do teste de diagnóstico, feita pela Carolina.

Dos cinco alunos que erraram, três apresentaram respostas cujas estratégias pressupõem a utilização do raciocínio proporcional. Por exemplo, Diogo fez $7 \times 3 = 14$, considerando que cada mesa tinha três cadeiras e procurando o número de mesas cuja multiplicação por três desse 14. Naturalmente que os cálculos estão errados, mas Diogo para além de considerar incorretamente que todas as mesas teriam três cadeiras, não obedecendo à estrutura espacial da sequência, usou uma estratégia de objeto inteiro que não se aplicava à situação.

Questão 5c)

Nesta questão era pedido aos alunos que descobrissem quantas pessoas se poderiam sentar se fossem juntas 20 mesas. Dez alunos responderam corretamente que 20 mesas sentariam 42 pessoas. Todos os alunos que deram esta resposta usaram uma estratégia recursiva, de desenho e contagem. A resolução de Fábio é bastante explícita sobre a estratégia que utilizou, numerando até as cadeiras, supostamente para evitar enganos na contagem.

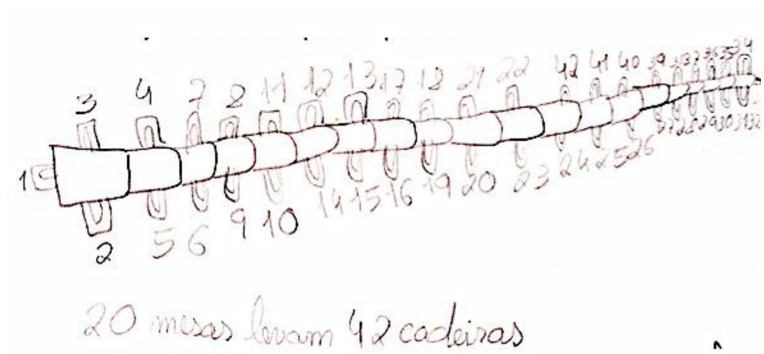
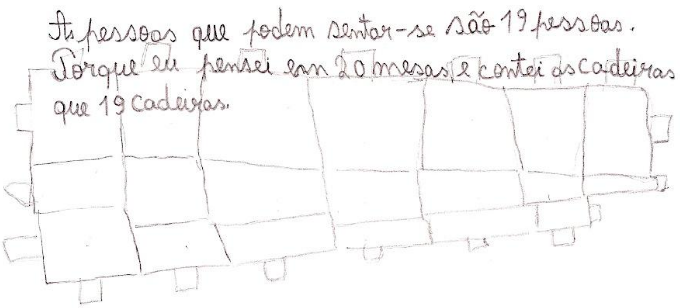


Figura 6.24 – Resolução da questão 5c) do teste de diagnóstico, feita pelo Fábio.

Embora tenha usado uma estratégia de desenho e contagem na resolução escrita do teste de diagnóstico, na entrevista Gonçalo refere ter descoberto que o número de cadeiras tinha de ser sempre um número par.

> Gonçalo – (...) E aqui contei e deu 42, tinha de ser um número par.
> Investigadora – Porquê?
> Gonçalo – Porque sabendo que em cada mesa só dá para 2 cadeiras, mais 2, mais 2, vai dar sempre um número par.

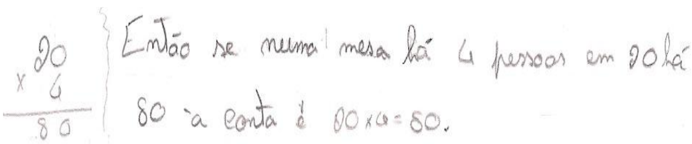
Um dos oito alunos que respondeu incorretamente também usou uma estratégia de desenho e contagem, mas não obedeceu à estrutura espacial da sequência. Embora este aluno tenha apagado o desenho original, deixou marcas suficientes que permitiram a sua reconstrução. Pelo desenho podemos perceber que o aluno organizou as mesas de uma forma retangular (mas não em fila como a sequência estava organizada) e contou as cadeiras à volta.



As pessoas que podem sentar-se são 19 pessoas. Porque eu pensei em 20 mesas e contei as cadeiras que [são] 19 cadeiras.

Figura 6.25 – Resolução da questão 5c) do teste de diagnóstico, feita pelo Daniel.

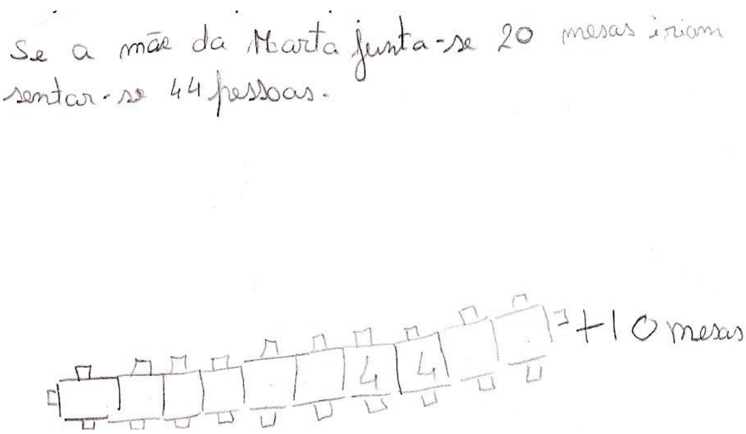
A resolução seguinte é também de uma aluna que não respondeu corretamente à questão. Esta aluna usou uma estratégia de objeto inteiro, aplicando diretamente o raciocínio proporcional à situação.



Então se numa mesa há 4 pessoas, em 20 há 80
A conta é $20 \times 4 = 80$.

Figura 6.26 – Resolução da questão 5c) do teste de diagnóstico, feita pela Rita.

Uma outra aluna também aplicou o raciocínio proporcional à situação, mas fez de forma diferente. Desenhou 10 mesas e contou corretamente as 22 cadeiras, depois assumiu que como 20 é o dobro de 10 (ou como se pressupõe pela sua representação $20 = 10 + 10$), 20 mesas teriam o dobro de 10 mesas (ou $22 + 22$), dando a resposta de 44.

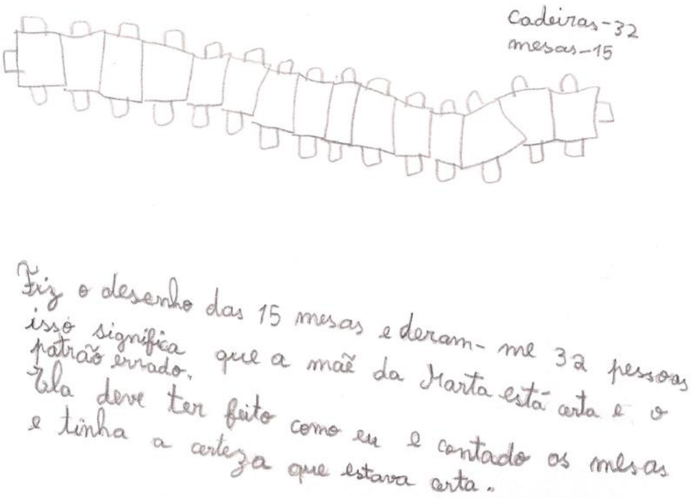


Se a mãe da Marta juntasse 20 mesas, iriam sentar-se 44 pessoas.

Figura 6.27 – Resolução da questão 5c) do teste de diagnóstico, feita pela Joana.

Questão 5d)

A última questão do teste de diagnóstico em análise solicitava aos alunos que se pronunciassem sobre a possibilidade de em 15 mesas se conseguirem sentar 33 pessoas. Apenas seis alunos responderam corretamente a esta questão. Desses seis alunos, cinco usaram explicitamente uma estratégia recursiva, baseada no desenho e contagem, como se pode verificar pelo exemplo.



Fiz o desenho das 15 mesas e deram-me 32 pessoas, isso significa que a mãe da Marta está certa e o patrão errado.
Ela deve ter feito como eu e contado as mesas e tinha a certeza que estava certa.

Figura 6.28 – Resolução da questão 5d) do teste de diagnóstico, feita pelo Gonçalo.

A aluna que também respondeu corretamente, mas que não usou uma estratégia de desenho e contagem, respondeu que "A mãe da Marta terá referido isso porque só se podem sentar 32 pessoas e assim fica uma de fora". Na situação de entrevista procurou-se perceber como a aluna tinha pensado.

> Matilde – Em 15 mesas eu fiz com os dedos, na primeira e última mesa levavam três, e depois contei mais 12 mesas com dois.
> Investigadora – E aí deu-te quanto?
> Matilde – Aí deu-me 24.

De facto, esta aluna começa a ensaiar uma regra que evidencia a estrutura da sequência. Embora com alguns enganos iniciais na sua explicação (pois considera 12 mesas com duas cadeiras, em vez de 13 mesas), esta aluna percebe que a estrutura da sequência implica que duas mesas (as das pontas) levem sempre três cadeiras e que as restantes levem duas cadeiras. Mais à frente, na entrevista, tornou-se bastante claro que a aluna conseguia determinar o número de cadeiras para qualquer número de mesas, aperfeiçoando a regra que tinha começado a emergir no seu raciocínio.

> Investigadora – Se eu quiser saber quantas pessoas preciso contar num número qualquer de mesas como é que eu sei?
> (Matilde não responde de imediato.)
> Investigadora – Por exemplo, para 100 mesas?
> Matilde – 202.
> Investigadora – E para 500 mesas?
> Matilde – 1002.
> Investigadora – E o que estás sempre a fazer?
> Matilde – Estou a fazer mais o número, estou a fazer 100 mais 100.
> Investigadora – Então, estás a fazer o quê? Isso é o...
> Matilde – O dobro.
> Investigadora – E depois fazes mais o quê?
> Matilde – Acrescento mais dois.
> Investigadora – Que são os dois...
> Matilde – Das pontas.
> Investigadora – Então para saber o número de pessoas que eu posso sentar em qualquer número de mesas, eu preciso só fazer o quê?
> Matilde – Fazer o dobro.
> Investigadora – O dobro do número de mesas e mais?
> Matilde – Mais dois que são as das pontas.

Dos 12 alunos que responderam incorretamente, oito alunos responderam com argumentos pouco precisos ou sem muito sentido, como evidenciam, por exemplo, as respostas seguintes de Beatriz, Daniel e Marco, respetivamente: “A mãe da Marta está referindo isso porque podem estar mais ou menos organizadas”, “ A mãe da Marta referiu isso porque nem sequer contou as cadeiras” e “A mãe da Marta disse que não era possível porque eram 20 mesas e o restaurante só tinha 15 mesas”. Dois alunos usaram os números referidos no enunciado e fizeram o algoritmo da adição: “$33 + 15 = 48$”. Das restantes duas respostas, uma referiu que em 15 mesas estariam 31 pessoas, sem mostrar como tinha pensado, e Rita voltou a usar incorretamente o raciocínio proporcional, fazendo $15 \times 4 = 60$.

6.2.1 Síntese

Perante os resultados apresentados relativos às questões do teste de diagnóstico selecionadas, importa agora fazer uma síntese da sua análise. Assim, a síntese é conduzida de forma a evidenciar primeiramente os resultados referentes às questões inseridas no contexto de promoção do pensamento relacional e, em seguida, as questões respeitantes ao contexto de promoção do pensamento funcional.

Capacidade de generalização em contextos referentes ao pensamento relacional

No que concerne às propriedades das operações tratadas na primeira questão do teste a partir de expressões numéricas particulares, a maior parte dos alunos conseguiu assinalar corretamente a veracidade dessas expressões. No entanto, a forma como justificaram as suas opções não foi reveladora da apreensão de alguma generalidade que conduzisse à identificação de cada uma das propriedades. De facto, a maior parte das respostas dos alunos evidenciaram o recurso a procedimentos de cálculo, nomeadamente e de forma bastante vincada, a utilização de algoritmos. Este recurso ao cálculo algorítmico é usado frequentemente, mesmo em questões que implicavam a multiplicação por um ou a adição de zero. Os procedimentos de cálculo são usados, de forma geral, na explicação dos raciocínios, quer nas respostas escritas, quer na situação de entrevista.

Esta forma de resolução deixa também antever uma conceção do sinal de igual enquanto "estímulo para o cálculo" (Molina & Ambrose, 2008), não evidenciando características da utilização do pensamento relacional. Desta forma, os alunos aceitam com facilidade expressões numéricas do tipo $a + b = c$, mas têm dificuldade em aceitar outras formas diferentes, em particular aquelas que contêm mais do que uma operação.

As propriedades das operações onde houve alguma evidência, mesmo pouco explícita, da apreensão da generalidade foram as relativas à propriedade comutativa e à utilização da adição e subtração do mesmo número. Esta última foi onde se verificou o maior número de respostas em que os alunos conseguiram justificar a veracidade da expressão numérica sem recorrer ao cálculo. Há a destacar também que as expressões que utilizavam um símbolo não numérico não se tornaram mais difíceis para os alunos e estes aceitaram com bastante facilidade a introdução desse símbolo, recorrendo a exemplos para justificarem as suas respostas.

Sintetizando, os alunos revelaram poucas capacidades na apreensão da generalidade das propriedades das operações expressas através de expressões numéricas particulares. Recorreram sistematicamente a procedimentos de cálculo, deixando antever que não houve um ensino intencional dessas propriedades que conduzisse à generalização das mesmas. Os alunos revelaram ainda uma conceção do sinal de igual enquanto estímulo para o cálculo, o que dificultou uma abordagem mais relacional das situações apresentadas (Molina & Ambrose, 2008), e consequentemente, uma maior dificuldade na apreensão da generalidade.

Capacidade de generalização em contextos referentes ao pensamento funcional

No que concerne às sequências pictóricas crescentes, os alunos também revelaram dificuldades em apreender a estrutura geral das mesmas. Concentraram-se nos termos particulares apresentados e apreenderam a relação, maioritariamente, através de estratégias recursivas (Lanin et al., 2006), recorrendo ao desenho e contagem, mesmo em termos menos próximos, como, por exemplo, o 20.º termo.

Para além das estratégias que recorriam às contagens, alguns alunos apresentaram estratégias que envolviam incorretamente o raciocínio proporcional, adotando estratégias de objeto inteiro (Lanin et al., 2006). Alguns alunos usaram essas estratégias indiscriminadamente ao longo da sequência da questão cinco, recorrendo a ela em quase todas as respostas (especialmente nos termos mais distantes) e não analisando criticamente os resultados que obtinham.

As dificuldades dos alunos centraram-se na apreensão da estrutura geral das sequências, concentrando-se nos termos particulares que eram apresentados ou naqueles que conseguiam desenhar. As suas dificuldades foram, assim, mais evidentes nos termos mais distantes das sequências. Para além disso, os alunos revelaram dificuldades na análise da razoabilidade dos seus resultados, não verificando se os procedimentos que usavam em determinada situação se podiam estender para toda a sequência. Assim, as suas dificuldades prenderam-se com a identificação da comunalidade e da diferença nos termos das sequências apresentadas, não conseguindo estender a sequência sem recorrer a estratégias recursivas. Alguns alunos manifestaram ainda dificuldades em respeitar a estrutura espacial da sequência.

Conclusões e implicações da análise diagnóstica

A maioria dos alunos da turma não revela grandes capacidades de generalização explícitas, concentrando-se em procedimentos de cálculo e estratégias recursivas. No entanto, vários alunos, na situação de entrevista, conseguiram apresentar raciocínios mais sofisticados, e com alguma orientação da investigadora, em alguns casos, evidenciaram explicitamente a generalização das propriedades das operações ou da regra geral das sequências.

A partir destes resultados obtidos no teste de diagnóstico, procuraram-se definir linhas orientadoras para a seleção/construção de tarefas para a experiência de ensino. Assim, considerou-se pertinente iniciar a experiência de ensino pela exploração de situações envolvendo regularidades numéricas que conduzissem os alunos à identificação da comunalidade e da diferença. Tendo em conta a predominância de estratégias associadas ao cálculo algorítmico manifestadas na resolução do teste de diagnóstico, procurou-se também propor tarefas que explorassem relacionalmente a aritmética, centrando-se no trabalho em torno das relações numéricas, da igualdade e das propriedades das operações. Os resultados do teste de diagnóstico reforçam ainda a importância da exploração de sequências pictóricas de forma a levar os alunos à identificação das variáveis e à relação direta entre elas.

Os resultados obtidos no teste de diagnóstico permitiram confirmar a pertinência da conjetura inicial de abordagem do desenvolvimento do pensamento algébrico através de situações que envolvessem contextos promotores do desenvolvimento do pensamento relacional e do pensamento funcional e da expressão e representação da generalização nesses contextos.

6.3 As sequências de tarefas concretizadas

A experiência de ensino desenvolvida decorreu de acordo com a organização das tarefas em cinco sequências realizadas ao longo do ano letivo. As sequências obedeceram aos tópicos trabalhados pela professora titular de turma, de acordo com a sua planificação anual de acordo com o PMEB (ME, 2007) e numa perspetiva de integração curricular.

As tarefas propostas à turma surgiam agrupadas em sequências de acordo com os seus objetivos comuns e de forma interligada. Assim, em cada sequência, as tarefas obedeciam a um certo encadeamento que permitia que os conhecimentos e capacidades fossem gradualmente desenvolvidos. Desta forma, cada sequência de tarefas foi estruturada de forma que os aspetos do pensamento algébrico fossem gradualmente explorados. Ao considerar como aspetos centrais a expressão e representação da generalização, a sua exploração foi transversal ao longo da experiência de ensino. Relativamente aos contextos de promoção da generalização e sua representação, a progressão foi no sentido de partir da exploração dos aspetos relativos ao desenvolvimento do pensamento relacional para a exploração dos aspetos relativos ao desenvolvimento do pensamento funcional, num crescente de complexidade relativamente aos conceitos trabalhados e às capacidades exigidas aos alunos. Desta forma, as sequências I e II exploraram aspetos relativos ao desenvolvimento do pensamento relacional, a sequência III procurou fazer uma ponte entre este e o pensamento funcional, a sequência IV incidiu ainda em aspetos de promoção do pensamento relacional, embora com maior complexidade relativamente às sequências anteriores, e a sequência V centrou-se nos aspetos relativos ao desenvolvimento do pensamento funcional. No total, foram exploradas quarenta e duas tarefas em sala de aula[4].

A seleção e construção das tarefas não foi uma atividade desenvolvida totalmente à priori. Antes do início da experiência de ensino foram selecionadas algumas tarefas possíveis de serem aplicadas, tendo em conta as grandes ideias a serem desenvolvidas e o objetivo geral de compreender o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos da turma. No entanto, só no decurso da implementação da experiência de ensino é que as tarefas foram sendo construídas ou adaptadas. Desta forma, procurou-se ajustar as tarefas que iam sendo aplicadas em sala de aula ao desempenho que os alunos iam revelando, indo ao encontro das aprendizagens que construíam e das dificuldades que manifestavam.

Os enunciados das tarefas são apresentados no Anexo 3[5]. Como os enunciados de cada tarefa foram entregues aos alunos de forma faseada, apresenta-se, em cada tarefa, uma linha tracejada que divide cada fase de resolução da tarefa. Assim, e tendo em conta a importância da exploração das tarefas em sala de aula, os enunciados apresentados em anexo procuram mostrar como as questões de cada tarefa foram agrupadas e qual a sequenciação que foi feita na sua exploração.

Nesta secção apresenta-se cada uma das cinco sequências de tarefas da experiência de ensino. Em cada sequência são apresentados os propósitos que levaram à sua constituição e sucintamente as tarefas que a compõem. A apresentação respeita a ordem cronológica em que foram exploradas as tarefas na sala de aula, no decurso da experiência de ensino.

Sequência I – A descoberta de regularidades numéricas

A primeira sequência de tarefas explorou as relações numéricas usando como contexto os múltiplos e divisores de um número natural. Os objetivos do PMEB (ME, 2007) explorados neste tópico foram os seguintes:

- Identificar e dar exemplos de múltiplos e de divisores de um número natural;
- Compreender que os divisores de um número são divisores dos seus múltiplos (e que os múltiplos de um número são múltiplos dos seus divisores);
- Explorar regularidades numéricas.

---

[4] As tarefas da experiência de ensino realizaram-se entre outubro de 2010 a junho de 2011.

[5] Por uma questão de economia de espaço, aos enunciados das tarefas foram retirados os espaços em branco que os alunos tinham para responder às questões.

Nesta sequência de tarefas os aspetos relacionados com o desenvolvimento do pensamento algébrico incidiram sobre aspetos de promoção do pensamento relacional. Assim, integraram a exploração de regularidades, das relações numéricas, da relação de igualdade, das propriedades das operações e da relação entre operações, nomeadamente entre a multiplicação e a adição e entre a multiplicação e a divisão (como operações inversas). Procurou-se ainda construir as primeiras generalizações a partir das regularidades encontradas, expressando-as em linguagem natural. Assim, inicialmente foram usados como contextos os múltiplos de um número natural para a descoberta de regularidades e para as primeiras tentativas de expressão de generalizações. Foi ainda trabalhado o conceito de comunalidade através da exploração de situações onde as regularidades se verificavam e o confronto com outras onde isso não acontecia, nomeadamente na exploração de regularidades nos múltiplos de onze.

A exploração de sequências de múltiplos de números naturais permitiu a relação com o trabalho já efetuado pelos alunos, em anos anteriores, com o estudo das tabuadas da multiplicação. As sequências de múltiplos foram exploradas no sentido de evidenciar as relações numéricas, a relação de igualdade e as propriedades das operações. Assim, neste sentido foram relacionadas expressões como as seguintes: $12 \times 3 = 36$ e $6 \times 6 = 36$, por aplicação das relações de metade e dobro; e $4 \times 3 = 12$ e $14 \times 3 = 42$, recorrendo à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. No seguimento deste trabalho, a tarefa “Construir a tabuada do 12” pretendia que os alunos determinassem os produtos associados a esta tabuada a partir de outros conhecidos e através da relação entre a adição e a multiplicação e da utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração.

As últimas três tarefas trabalharam o conceito de divisor, a relação entre a multiplicação e a divisão e a expressão de generalizações nesse contexto. Também aqui foram evidenciadas as relações numéricas, relação de igualdade e propriedades das operações.

O Quadro 6.3 sistematiza a informação sobre as nove tarefas desenvolvidas nesta sequência, indicando os objetivos específicos de cada uma delas.

Quadro 6.3 – Tarefas da Sequência I.

Sequência I – A descoberta de regularidades numéricas			
N.º	**Data**	**Tarefas**	**Objetivos**
1.ª	19/10	Regularidades, números pares e múltiplos de 5 e 10	- Reconhecer regularidades; - Identificar regularidades nos múltiplos de 2, 5 e 10; - Relacionar os múltiplos de 2, 5 e 10; - Desenvolver a capacidade de generalização.
2.ª	20/10	Regularidades nas tabuadas	- Reconhecer regularidades; - Identificar regularidades nos múltiplos de 3, 6 e 9; - Desenvolver a capacidade de generalização.
3.ª	21/10	Descobrindo regularidades I	- Reconhecer o que é uma regularidade; - Explicar a regularidade usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição; - Desenvolver a capacidade de generalização.
4.ª	22/10	Descobrindo regularidades II	
5.ª	26/10	De onze em onze	
6.ª	28/10	Construir a tabuada do 12	- Usar as relações numéricas (dobro e metade) e as propriedades das operações para calcular produtos; - Desenvolver a capacidade de generalização.
7.ª	2/11	Sandes para o lanche	- Explorar a relação entre a multiplicação e a divisão; - Construir o conceito de divisor de um número
8.ª	4/11	Castanhas para todos I	- Compreender a relação entre a multiplicação e a divisão; - Distinguir múltiplos de divisores; - Construir a regra: “os divisores de um número são também divisores dos seus múltiplos”. - Desenvolver a capacidade de generalização.
9.ª	5/11	Castanhas para todos II	

Sequência II – A exploração de relações numéricas

A segunda sequência de tarefas explorou relações numéricas, em particular situações envolvendo a operação multiplicação. Os objetivos do PMEB (ME, 2007) explorados neste tópico foram os seguintes:

- Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades;
- Compreender, construir e memorizar as tabuadas da multiplicação;
- Compreender os efeitos das operações sobre os números;
- Resolver problemas que envolvam as operações em diversos contextos;
- Explorar regularidades.

Esta sequência de tarefas abordou essencialmente a operação multiplicação, procurando responder às dificuldades dos alunos que foram detetadas na resolução das tarefas na sequência anterior, nomeadamente ao nível da utilização das propriedades dessa operação e do reconhecimento das relações numéricas. Os aspetos relativos ao pensamento algébrico explorados nesta sequência de tarefas incidiram sobre aspetos de promoção do pensamento relacional e envolveram as propriedades das operações (mais especificamente, da multiplicação), as relações numéricas, a relação de igualdade, a relação entre as operações inversas e a expressão e representação da generalização. As tarefas exploravam problemas com contextos baseados em situações do dia-a-dia e que se pretendiam significativos para os alunos.

Nas primeiras tarefas foi explorada a disposição retangular da multiplicação fazendo emergir a relação entre a multiplicação e a adição e as propriedades comutativa, associativa e distributiva. Depois, nas tarefas seguintes, foram exploradas diversas estratégias de cálculo que envolviam as relações numéricas de dobro e metade, procurando que os alunos as reconhecessem e aplicassem para além dos casos particulares em que eram enunciadas. Nestas tarefas era também requerido aos alunos a expressão da generalização e começou a ser feita a iniciação à representação simbólica, através da utilização de símbolos próprios. A propriedade distributiva foi também trabalhada no contexto das tabuadas, explorando as relações numéricas envolvidas e procurando colmatar as dificuldades experimentadas pelos alunos na sequência anterior. A penúltima tarefa – Verdadeiro ou falso? – explorava igualdades numéricas envolvendo as propriedades da multiplicação. A última tarefa – Descobre o valor do símbolo – trabalhava as mesmas questões da tarefa anterior, mas introduzindo representações simbólicas não numéricas, com o sentido de incógnita.

O Quadro 6.4 sistematiza a informação sobre as dez tarefas desenvolvidas nesta sequência, indicando os objetivos específicos de cada uma delas.

Quadro 6.4 – Tarefas da Sequência II.

Sequência II – A exploração de relações numéricas			
N.º	**Data**	**Tarefas**	**Objetivos**
10.ª	16/11	Salas de cinema	- Explorar as propriedades da multiplicação: comutativa, associativa e distributiva; - Explorar a disposição retangular da multiplicação.
11.ª	18/11	Cem cadeiras	
12.ª	23/11	Embalagens de garrafas de água	
13.ª	25/11	Calcular usando o dobro	- Explorar as relações numéricas de dobro e metade; - Explorar a relação multiplicação e divisão; - Desenvolver a capacidade de generalização; - Desenvolver a capacidade de simbolização.
14.ª	30/11	A festa de anos da Marta	
15.ª	02/12	A estratégia do Afonso	
16.ª	07/12	Diferentes estratégias de cálculo	- Explorar diferentes estratégias de cálculo; - Explorar as propriedades da multiplicação; - Explorar relações numéricas.
17.ª	13/01	Adicionando linhas da tabuada	- Explorar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e em relação à subtração; - Explorar relações numéricas.
18.ª	21/01	A estratégia da Marta	- Explorar as relações numéricas de dobro e metade; - Explorar a relação multiplicação e divisão; - Desenvolver a capacidade de generalização; - Desenvolver a capacidade de simbolização.
19.ª	27/01 28/01	Verdadeiro ou falso	- Explorar as propriedades da multiplicação; - Explorar a igualdade de expressões numéricas.
20.ª	03/02	Descobrir o valor do símbolo	- Explorar as propriedades da multiplicação; - Explorar a igualdade de expressões numéricas; - Explorar o sentido de símbolos não numéricos (com o significado de incógnita).

Sequência III – A exploração da variação de quantidades

A terceira sequência de tarefas explorou a variação de quantidades, enquadrado no tema Medidas. Os objetivos do PMEB (ME, 2007) explorados neste tópico foram os seguintes:

- Comparar e ordenar medidas de diversas grandezas;
- Resolver problemas relacionando perímetro e área;
- Compreender e utilizar as fórmulas para calcular a área do quadrado e do retângulo;
- Resolver problemas respeitantes a grandezas, utilizando e relacionando as unidades de medida SI.

Os aspetos relativos ao pensamento algébrico explorados nesta sequência de tarefas abordaram aspetos relativos ao pensamento relacional, mas, ao trabalharem a variação de quantidades, iniciavam já um percurso em direção à promoção do pensamento funcional. Assim, para além de explorarem relações numéricas e de igualdade, exploravam a variação de quantidades e a relação entre variáveis. Transversalmente, as tarefas tinham também como objetivos a expressão e representação da generalização. Os tipos de representação explorados nesta sequência de tarefas foram de natureza variada, desde a utilização de tabelas, diagramas até à representação simbólica idiossincrática. Nas tarefas envolvendo as noções de perímetro e área, as representações utilizadas para as fórmulas de cálculo foram as representações simbólicas $4 \times L$ e $L \times L$, respetivamente, devido ao facto de os alunos já as utilizarem anteriormente.

As primeiras duas tarefas exploraram igualdades numéricas com quantidades desconhecidas, abordando a variação de quantidades e a relação entre elas. Nessas tarefas foram trabalhadas diferentes representações das relações numéricas e o desenvolvimento da capacidade de generalização e sua expressão simbólica. As tarefas seguintes enquadraram-se no contexto das medidas. A terceira explorava a variação de alturas e as seguintes utilizavam as noções de perímetro e área e as suas relações. As tarefas "Quadrados I", "Construindo triângulos com fósforos" e "Quadrados II" apresentavam sequências pictóricas crescentes. Todas as tarefas tinham como objetivos explorar a variação de quantidades/grandezas e a identificação de variáveis e da relação entre elas. Os contextos apresentados nas tarefas procuravam ser significativos para que os alunos atribuíssem sentido às situações e as interpretassem corretamente.

O Quadro 6.5 sistematiza a informação sobre as nove tarefas desenvolvidas nesta sequência, indicando os objetivos específicos de cada uma delas.

Quadro 6.5 – Tarefas da Sequência III.

Sequência III – A exploração da variação de quantidades			
N.º	**Data**	**Tarefas**	**Objetivos**
21.ª	10/02	Os cromos da Ana e do Bruno	- Explorar igualdades numéricas com quantidades desconhecidas; - Explorar a variação de quantidades; - Explorar diferentes representações; - Desenvolver a capacidade de generalização;
22.ª	11/02	Descobre A e B	
23.ª	24/02	Comparando alturas	- Explorar a variação de quantidades; - Explorar diferentes representações; - Desenvolver a capacidade de generalização; - Desenvolver a simbolização.
24.ª	01/03	Os quadrados I	- Explorar a noção de perímetro; - Desenvolver a capacidade de generalização; - Desenvolver a capacidade de simbolização.
25.ª	03/03	Construindo triângulos com fósforos	
26.ª	10/03	Os quadrados II	- Explorar a noção de área; - Desenvolver a capacidade de generalização; - Desenvolver a capacidade de simbolização.
27.ª	15/03	Os azulejos	- Explorar as relações entre área e perímetro; - Desenvolver a capacidade de generalização; - Desenvolver a capacidade de simbolização.
28.ª	17/03	A cerca do Faísca	
29.ª	24/03	A cerca do Bobi	

IV – A exploração de regularidades numérica

A quarta sequência de tarefas explorou regularidades numéricas com situações mais complexas do que as trabalhadas nas sequências anteriores. Enquadrada no tópico regularidades do tema Números e operações, o principal objetivo de acordo com o PMEB (ME, 2007) dizia respeito o "Investigar regularidades numéricas" (p. 18).

Esta sequência de tarefas explorou regularidades numéricas em diferentes contextos predominante numéricos, como tabelas numéricas, jogos de dominó e calendários. Os aspetos relativos ao pensamento algébrico explorados nesta sequência de tarefas, enquadrados na promoção do pensamento relacional, envolveram as relações numéricas, a relação de igualdade e a relação entre as operações inversas. Em todas as tarefas foi trabalhada a expressão e representação da generalização. Os tipos de representação utilizados foram diversos, incluindo a linguagem natural, tabelas, diagramas e a linguagem idiossincrática e simbólica.

Nestas tarefas era solicitado aos alunos que identificassem as regularidades apresentadas, as aplicassem a outros casos com características idênticas e as generalizassem baseando-se nas relações numéricas e nas propriedades das operações. Com contextos marcadamente numéricos, as situações apresentadas aos alunos não envolviam a descrição de uma história-problema ancorada em contextos reais. Assim, as referências que os alunos podiam usar para resolver os desafios eram apenas numéricas ou de ordem estrutural, por exemplo, tendo em conta a disposição dos números numa tabela, de acordo com a sua estrutura.

O Quadro 6.6 sistematiza a informação sobre as cinco tarefas desenvolvidas nesta sequência, indicando os seus objetivos específicos.

Quadro 6.6 – Tarefas da Sequência IV.

<table>
<tr><th colspan="4">Sequência IV – A exploração de regularidades numéricas</th></tr>
<tr><th>N.º</th><th>Data</th><th>Tarefas</th><th>Objetivos</th></tr>
<tr><td>30.ª</td><td>12/05</td><td>Pensa num número</td><td rowspan="5">- Explorar regularidades numéricas;
- Explorar a relação entre as operações inversas;
- Desenvolver a capacidade de generalização;
- Desenvolver a simbolização.</td></tr>
<tr><td>31.ª</td><td>13/05</td><td>Explorando dominós e calendários</td></tr>
<tr><td>32.ª</td><td>19/05</td><td>Calendários e tabelas</td></tr>
<tr><td>33.ª</td><td>20/05</td><td>Os números e o calendário</td></tr>
<tr><td>34.ª</td><td>23/05</td><td>Pares e ímpares</td></tr>
</table>

Sequência V – A exploração de relações funcionais

A quinta e última sequência de tarefas explorou relações funcionais, tendo como contextos problemas e tarefas de exploração envolvendo sequências pictóricas crescentes. Nesta sequência, enquadrada no tema Números e operações, no tópico Regularidades e no subtópico Sequências, os objetivos do PMEB (ME, 2007) explorados foram os seguintes:

- Explorar regularidades numéricas;
- Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional.

Os aspetos relativos ao pensamento algébrico explorados nesta sequência de tarefas enquadram-se no desenvolvimento do pensamento funcional. Assim, a exploração das tarefas envolveu o trabalho em torno das relações numéricas, da relação entre as operações inversas, e também da identificação de variáveis e da relação entre elas. Nesta sequência de tarefas, as relações exploradas eram marcadamente funcionais. De forma transversal, em todas as tarefas, explorou-se a expressão e representação da generalização.

As primeiras duas tarefas apresentavam problemas envolvendo sequências crescentes, com contextos realistas. Os contextos apresentados nos problemas permitiam interpretar as situações e identificar as variáveis envolvidas. Nestas tarefas era solicitado aos alunos que expressassem a generalização das relações, o que aconteceu, maioritariamente, em linguagem natural.

As restantes tarefas apresentavam sequências pictóricas crescentes. Nestas tarefas foram exploradas a identificação das variáveis dependente e independente e a sua relação com os termos da sequência e a sua ordem, respetivamente. Em algumas tarefas trabalharam-se relações de proporcionalidade direta e, em outras, as sequências envolviam expressões do tipo $an + b$, com a, b e n números naturais. A exploração iniciou-se pela solicitação da continuação das sequências, normalmente através do desenho de termos seguintes. Explicitamente era pedido aos alunos que revelassem qual a relação entre as variáveis independente e dependente e, em algumas tarefas, era solicitada a relação inversa. A expressão da generalização envolvia diferentes representações, tais como a linguagem natural, tabelar, diagramas e a escrita da regra geral em linguagem simbólica.

O Quadro 6.7 sistematiza a informação sobre as oito tarefas desenvolvidas nesta sequência, indicando os objetivos específicos de cada uma delas.

Quadro 6.7– Tarefas da Sequência V.

Sequência V – A exploração de relações funcionais			
N.º	**Data**	**Tarefas**	**Objetivos**
35.ª	27/05	Quantos telefonemas?	- Explorar problemas envolvendo relações funcionais; - Explorar relações numéricas; - Explorar relações entre variáveis; - Explorar diferentes representações; - Desenvolver a capacidade de generalização; - Desenvolver a capacidade de simbolização.
36.ª	30/05	A mesada da Ana	
37.ª	31/05	Separando cubos	- Explorar sequências pictóricas crescentes; - Explorar relações numéricas; - Explorar a relação entre as operações inversas; - Explorar relações entre variáveis; - Desenvolver a capacidade de generalização; - Desenvolver a capacidade de simbolização.
38.ª	02/06	Colares I	
39.ª	03/06	Colares I – continuação	
40.ª	06/06	Colares II	
41.ª	07/06	Cubos com autocolantes	
42.ª	08/06	Porta-aviões	

Capítulo 7 – O desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos

Este estudo foca-se no desenvolvimento da capacidade de generalização dos alunos de uma turma do 4.º ano de escolaridade, no decurso de uma experiência de ensino implementada durante um ano letivo, ancorada numa perspetiva de desenvolvimento do pensamento algébrico.

Neste capítulo apresento os dados decorrentes da implementação da experiência de ensino, de acordo com o quadro de análise referido no capítulo da metodologia. Assim, os resultados são apresentados respeitando a ordem cronológica da experiência de ensino e de acordo com o agrupamento das tarefas matemáticas em sequências. Começo com a apresentação dos resultados referentes às tarefas da segunda sequência, seguindo-se os das tarefas da terceira sequência, quarta sequência e, por último, da quinta sequência. A seleção das tarefas para esta análise de dados obedeceu aos critérios também definidos no capítulo da metodologia.

Para cada tarefa é apresentada, primeiramente, a análise dos trabalhos dos alunos em pares ou grupos e, em seguida, a análise centra-se no momento de discussão coletiva. Na análise das produções dos alunos resultantes dos momentos de trabalho autónomo são apresentados, sob a forma de tabelas, o nível de pensamento relacional ou funcional (de acordo com o contexto específico das tarefas), o nível de generalização, uma análise cruzada do nível de pensamento relacional/funcional e do nível de generalização e, por último, o tipo de representação utilizado pelos alunos. Nos momentos de discussão coletiva emprega-se o mesmo modelo de análise, incluindo-se ainda excertos de intervenções dos alunos e da investigadora que favoreceram a compreensão de momentos chave no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos da turma. Após a apresentação das tarefas relativas a cada sequência de tarefas é apresentada uma síntese dos elementos mais significativos da análise realizada.

7.1 A exploração de relações numéricas – Sequência II

Na sequência II são apresentadas duas tarefas – "Calcular usando o dobro" e "A estratégia do Afonso" – décima terceira e décima quinta tarefas da experiência de ensino, respetivamente.

7.1.1 Tarefa 13 – "Calcular usando o dobro"

A tarefa (Anexo 3) explorava uma estratégia de cálculo envolvendo as relações numéricas de dobro e metade: o dobro dos valores da tabuada do quatro é equivalente aos valores da tabuada do oito (Figura 7.1). Pretendia-se que, a partir dos exemplos apresentados, os alunos reconhecessem as relações numéricas envolvidas na estratégia de cálculo e as generalizassem para além dos casos particulares.

Após a apresentação da tarefa, pela investigadora, os alunos resolveram-na autonomamente (em sete pares e um trio) e, em seguida, realizou-se o momento de discussão coletiva. A análise aqui apresentada foca-se primeiramente nas resoluções dos pares de alunos, indicando o nível de pensamento relacional, o nível de generalização e o tipo de representações usadas pelos alunos. Posteriormente, apresenta-se a análise centrada no momento de discussão coletiva.

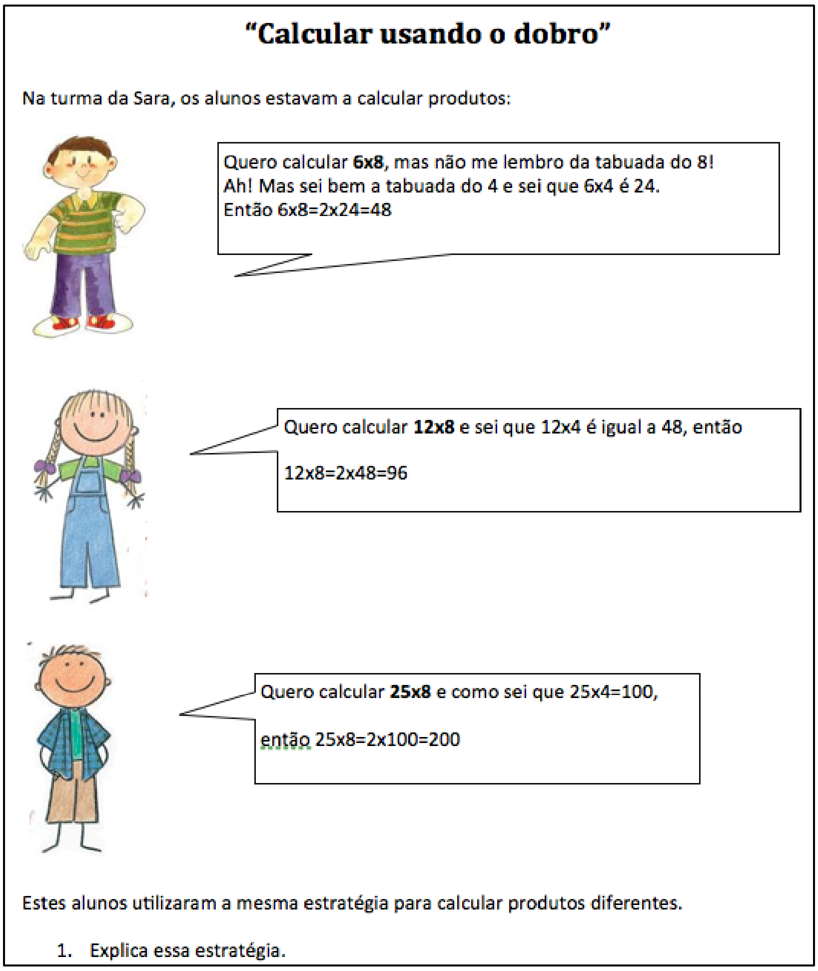


Figura 7.1 – Enunciado da tarefa 13 "Calcular usando o dobro".

Trabalho autónomo dos alunos

A forma como os diferentes grupos de alunos (I ao VIII) reconheceram as relações numéricas da estratégia de cálculo foi analisada quanto ao nível de pensamento relacional, de acordo com as categorias apresentadas no capítulo da metodologia: 1) não relacional (NR), 2) utilização de exemplos particulares (EP), 3) utilização de quase-variáveis (QV) e 4) relacional (R).

Quadro 7.1 – Nível de pensamento relacional dos grupos de alunos na tarefa 13.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total
NR									0
EP	x	x	x	x		x		x	6
QV					x		x		2
R									0

Pela leitura do Quadro 7.1 constata-se que, dos oito grupos, seis reconheceram as relações numéricas de dobro e metade nos exemplos particulares apresentados. Dois grupos conseguiram ainda usar esses exemplos particulares, mas com sentido de quase-variáveis, ou seja, tomando-os como exemplos da relação numérica, mas não a circunscrevendo a esses casos particulares. A resolução do par Joana e Gonçalo (V) é um exemplo desse tipo de perceção da relação aritmética (Figura 7.2).

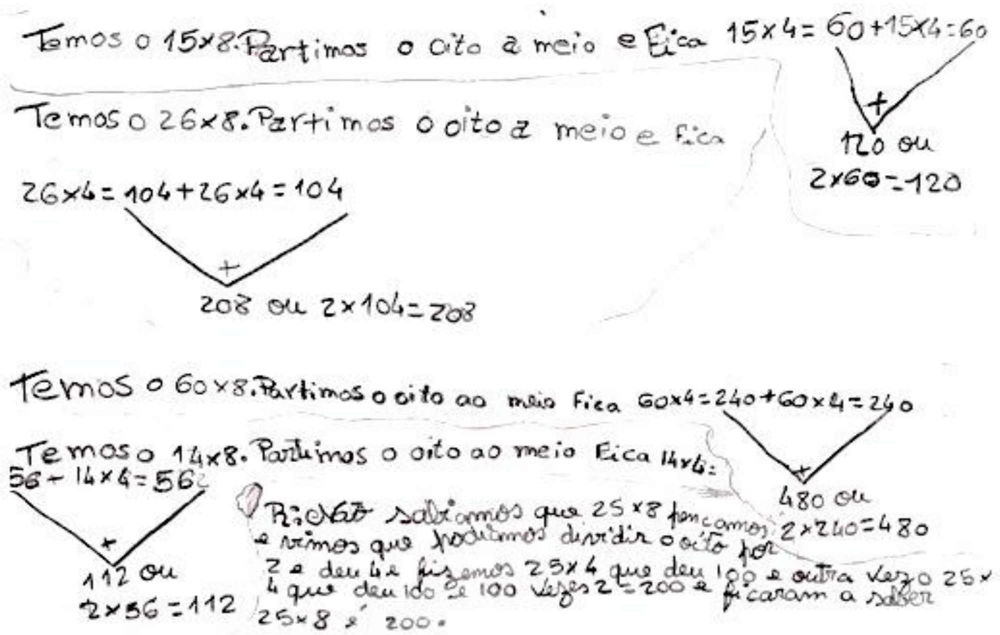


Figura 7.2 – Resolução do par Joana e Gonçalo (V) da tarefa 13.

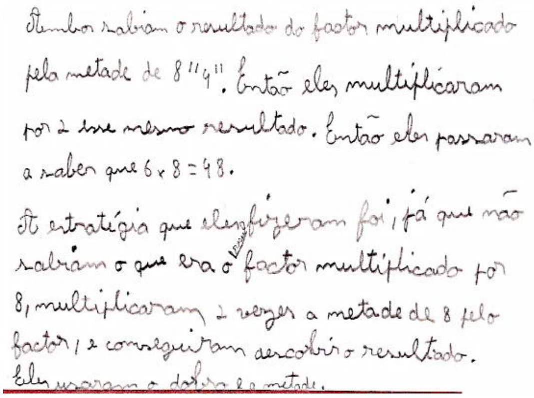
Joana e Gonçalo (V) explicaram a relação aritmética usando outros exemplos particulares que não eram apresentados no enunciado da tarefa. O facto de usarem outros exemplos revela que estes alunos reconheceram a relação aritmética de forma a estendê-la para além dos casos particulares apresentados, embora não tenham ainda enunciado essa estratégia de forma geral. A forma como representaram numericamente a relação, ainda que de forma incorreta no que respeita à representação da igualdade, dá evidência do procedimento correto que efetuaram para obter os produtos da tabuada do oito usando o dobro dos produtos da tabuada do quatro.

Relativamente ao nível de generalização da relação aritmética (Quadro 7.2), verifica-se que, dos oito grupos, sete perceberam a comunalidade entre os casos apresentados, não se referindo a quantidades indeterminadas e apresentando uma generalização de nível aritmético (A). Somente um par conseguiu expressar a generalização algébrica, fazendo emergir uma regra a partir dos casos particulares (F).

Quadro 7.2 – Nível de generalização dos grupos de alunos na tarefa 13.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total
NG									0
A	x	x	x	x	x	x		x	7
F							x		1
C									0
G									0

O par Matilde e do André (VII) apresentou um nível mais elaborado de generalização, a generalização factual (Figura 7.3). Este par, apesar de usar os casos particulares, consegue descrever a relação usando esses casos com sentido de quase-variáveis. Desta forma, a indeterminação aparece quando estes alunos não se referem a casos concretos, mas a um "fator" qualquer, como referem na explicação da estratégia: "... já que não sabiam o que era o fator multiplicado por 8, multiplicaram 2 vezes a metade de 8 pelo fator". No entanto, não nomeiam ainda a indeterminação de forma explícita, como num nível de generalização superior, por ainda mencionarem um fator e não os fatores em geral. Este par mostra, assim, a relação aritmética através dos casos particulares usados com sentido de quase-variável e enunciando um nível de generalização factual (F).



Ambos sabiam o resultado do fator multiplicado pela metade de 8 “4”. Então eles multiplicaram por 2 esse mesmo resultado. Então eles passaram a saber que 6x8=48.
A estratégia que eles fizeram foi, já que não sabiam o que era o fator multiplicado por 8, multiplicaram 2 vezes a metade de 8 pelo fator, e conseguiram descobrir o resultado.
Eles usaram o dobro e a metade.

Figura 7.3 – Resolução do par Matilde e André (VII) da tarefa 13.

Através da análise cruzada entre o nível de pensamento relacional e o nível de generalização (Quadro 7.3), constata-se que seis grupos expressaram a relação nos exemplos particulares apresentados no enunciado da tarefa (EP), percebendo apenas a comunalidade nesses casos (generalização aritmética). Um grupo (V) conseguiu expressar a relação para além dos casos particulares apresentados, usando outros com sentido de quase-variáveis, mas ainda num nível de generalização aritmética, não fazendo surgir qualquer regra que envolvesse a indeterminação. Apenas um grupo (VII) conseguiu, através da utilização de quase-variáveis, expressar a generalização num nível factual (F), fazendo emergir uma regra para os casos particulares, mas sem nomear explicitamente a indeterminação.

Quadro 7.3 – Relação entre o nível de pensamento relacional e o nível de generalização dos grupos de alunos na tarefa 13.

		Nível de generalização				
		NG	A	F	C	G
Nível de pensamento relacional	NR					
	EP		6			
	QV		1	1		
	R					

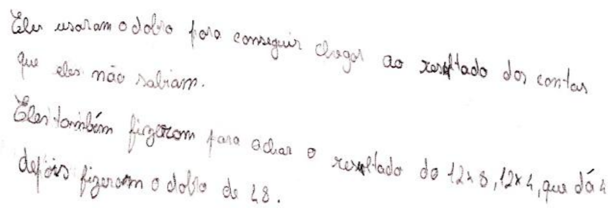
No que respeita aos tipos de representação da relação aritmética (Quadro 7.4), todos os grupos a expressaram utilizando a linguagem natural (LN). Três grupos utilizaram ainda uma representação numérica (N), apresentando uma expressão numérica em simultâneo com a linguagem natural.

Quadro 7.4 – Tipo de representação usado pelos grupos de alunos na tarefa 13.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total
LN	x	x	x	x	x	x	x	x	8
N		x			x			x	3
D									0
Dg/E									0
T									0
S									0
I									0
A									0
Total	1	2	1	1	2	1	1	2	

Discussão coletiva

O primeiro grupo a apresentar a sua resolução na discussão coletiva foi o par formado pelo João P. e a Beatriz (VI). A sua forma de resolução é apresentada na Figura 7.4.


Eles usaram o dobro para conseguir chegar ao resultado dos contas que eles não sabiam.
Eles também fizeram para achar o resultado do 12×8, 12×4, que dá 4
depois fizeram o dobro de 48.

Eles usaram o dobro para conseguir chegar ao resultado das contas que eles não sabiam.
Eles também fizeram para achar o resultado do 12×8, 12×4 que dá 48 e depois fizeram o dobro de 48.

Figura 7.4 – Resolução do par João P. e Beatriz (VI) da tarefa 13.

Este par consegue perceber que estavam envolvidas as relações numéricas de dobro e metade nos exemplos particulares apresentados no enunciado (EP), mas não consegue evidenciar um nível de generalização algébrica, apenas percebendo a comunalidade entre os casos apresentados. Desta forma, a generalização que expressa é de nível aritmético (A). Usa a linguagem natural (LN) para expressar a relação.

Em seguida, o trio Carolina, Diogo e António (II) apresenta a sua forma de resolução (Figura 7.5). Este grupo também consegue apreender a comunalidade nos casos apresentados no enunciado da tarefa, evidenciando um nível de generalização aritmética (A). Embora apenas recorra aos exemplos particulares (EP) apresentados na tarefa, este grupo representa de forma muito explícita a relação numérica de dobro envolvida na estratégia de cálculo, complementando a representação em linguagem natural (LN) com uma representação numérica (N).

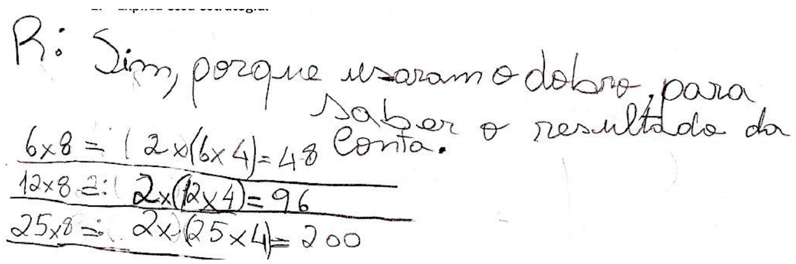

R: Sim, porque usaram o dobro para saber o resultado da conta.
6x8 = (2x(6x4)=48
12x8 = 2x(12x4)=96
25x8 = 2x(25x4)= 200

Figura 7.5 – Resolução do trio Carolina, Diogo e António (II) da tarefa 13.

Após a exploração destas resoluções, a investigadora procura que os alunos enunciem a estratégia de cálculo de uma forma mais geral, indo para além dos exemplos particulares apresentados.

> Investigadora – Ok. Temos lá três exemplos, mas esta estratégia só serve para aqueles exemplos?
> Vários alunos – Não.
> Fábio – A estratégia que nós fizemos dá para todas as contas.
> Investigadora – E como podemos resumir de forma clara essa estratégia? Que estratégia foi essa?
> Diogo – Fizemos a conta do dobro.
> Investigadora – O dobro de quê?
> Diogo – O dobro do resultado.
> Investigadora – És capaz de explicar melhor? Acrescentar mais um bocadinho?
> (Diogo não responde.)
> Investigadora – Qual era a tabuada que queríamos trabalhar?
> Vários alunos – A do oito.
> Investigadora – E para trabalhar a tabuada do oito, usámos qual tabuada?
> Vários alunos – A do quatro.
> Rita – Podemos usar as metades.
> Investigadora – E o que é que nós descobrimos? Eu posso fazer a tabuada do oito usando qual?
> Vários alunos – A do quatro.
> Investigadora – Como é que posso escrever isso?
> Rita – Se nós formos à tabuada do quatro, depois multiplicarmos o quatro pelo número que queríamos da tabuada do oito, se multiplicarmos duas vezes, vai dar o resultado da tabuada do oito.

No início deste excerto de discussão conseguimos perceber que Fábio reconhece que a relação numérica se aplica para além dos casos particulares, ao referir que a estratégia de cálculo "dá para todas as contas". No final do excerto de discussão aqui apresentado, Rita consegue generalizar a relação de forma contextual, apoiando-se na descrição dos procedimentos de cálculo. Neste momento, a investigadora solicita aos alunos que sejam ainda mais claros na expressão dessa relação e, um aluno, João V., consegue escrever no quadro a generalização da estratégia de cálculo (Figura 7.6).

Para descobrirmos a tabuada do 8 fazemos o dobro ($\times$ 2) da tabuada do 4.

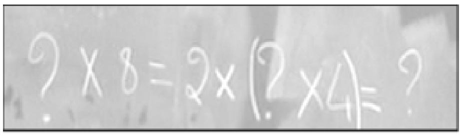
Figura 7.6 – Generalização da estratégia de cálculo, escrita pelo João V, na tarefa 13.

Embora ainda no contexto das tabuadas do quatro e do oito, a expressão da estratégia de cálculo evidencia um nível de generalização mais abrangente do que aquele que foi apresentado pelos diferentes grupos no momento de trabalho autónomo. Assim, neste momento da discussão coletiva, os alunos Fábio, Rita e João V. conseguiram expressar a generalização da relação aritmética num nível contextual (C), referindo a indeterminação (não especificando valores particulares), mas ainda envolvendo o contexto das tabuadas trabalhadas na estratégia de cálculo.

Depois de expressa a generalização em linguagem natural, a investigadora solicita aos alunos que expressem a relação aritmética usando a linguagem matemática. Sendo esta a primeira vez em que isto é solicitado aos alunos e com o objetivo de que estes percebam o que era pretendido, a investigadora conduziu o seguinte diálogo:

> Investigadora – Agora quero que pensem nesta frase que o João V. escreveu e que a escrevam na linguagem matemática. Como é que eu posso usar a linguagem matemática?
> Vários alunos – Com contas.
> Investigadora – Então como é que eu posso escrever isto? Mas atenção que eu não quero para casos particulares como o 6×8, o 12×8 ou o 25×8, eu quero para todos os números da tabuada do oito e do quatro.
> Rita – Podemos fazer para 7×8.
> Investigadora – Isso é um caso particular. Eu quero que dê para todos os casos.
> Rita – Como assim?
> Investigadora – Para todos os casos da tabuada do oito. O que é que acontece na tabuada do oito?
> Aluno – É sempre mais oito.
> Investigadora – Vamos acrescentar sempre mais oito. Ou seja, se usarmos a multiplicação estamos a fazer o quê?
> Vários alunos – Sempre a multiplicar por oito.
> Investigadora – Como é que eu posso escrever isso?
> Rita – Usamos um ponto de interrogação.
> Fábio – Vezes oito.

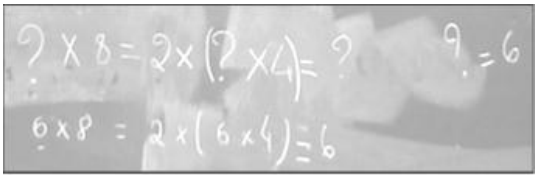
Ao referir-se ao "ponto de interrogação", Rita utiliza o símbolo que tinha sido usado na tarefa "Salas de Cinema" (Sequência I). Essa foi, de facto, a tarefa onde o símbolo surgiu pela primeira vez, proposto pela investigadora, mas com sentido de incógnita, representando "qual o número" em expressões como "$? \times 5 = 100$". Assim, Rita consegue escrever no quadro a seguinte expressão:



$$? \times 8 = 2 \times (? \times 4) = ?$$

Figura 7.7 – Expressão da generalização em linguagem matemática, feita por Rita, na tarefa 13.

A expressão sugerida pela Rita é discutida com a turma. A investigadora propõe a substituição do "ponto de interrogação" por um número qualquer, procurando que os alunos atribuam sentido àquele símbolo e que verifiquem a veracidade da expressão apresentada por Rita. Inicialmente, os alunos sugerem a utilização do número seis e a investigadora substitui o símbolo por esse número (Figura 7.8). Posteriormente, a investigadora solicita que escolham outros números e realiza com os alunos o mesmo procedimento, procurando que estes concebam o símbolo com o sentido de uma representação de um "número qualquer".



$$? \times 8 = 2 \times (? \times 4) = ? \qquad ?=6$$

$$6 \times 8 = 2 \times (6 \times 4) = 6$$

Figura 7.8 – Exploração da expressão apresentada pela Rita, na tarefa 13.

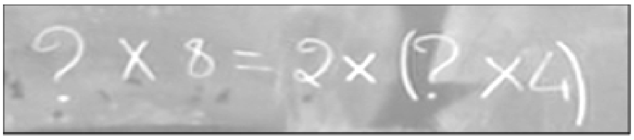
A partir da análise da expressão apresentada pela Rita, alguns alunos referem que a expressão não pode ser verdadeira. Desta forma, alguns alunos referem que a seguir ao sinal de igual não deverá estar o "ponto de interrogação".

Investigadora – Então 6×8 é igual a $2 \times 6 \times 4$. Está bem? Isso é igual a…
Vários alunos – 48.
Investigadora – Mas a Rita tem aqui igual ao símbolo, ao ponto de interrogação…
Fábio – Assim, é igual a seis.
Investigadora – Se nós dissemos que aqui o símbolo valia seis, então seria igual a seis, pode ser assim?
Vários alunos – Não.
Gonçalo – É igual a duas vezes o ponto de interrogação vezes quatro.

Rita – Mas aqui não se mete igual a um número?
Vários alunos – Não.
Investigadora – Se colocares este símbolo como fizeste, se aqui ele vale seis, aqui (apontando para o símbolo depois do sinal de igual) também vale seis. Se aqui vale 10, aqui também vai valer 10. Se eu substituir por outro número vai sempre valer esse número.

Neste excerto da discussão coletiva, embora Fábio e Gonçalo aceitem a expressão numérica sem necessitarem igualá-la a um número, Rita questiona: “Mas aqui não se mete igual a um número?”. Esta intervenção de Rita parece revelar a forma como a aluna perceciona o sinal de igual enquanto “estímulo para o cálculo”, necessitando colocar um valor após o último sinal de igual e demonstrando alguma dificuldade em aceitar a igualdade naquela forma.

Na sua última intervenção nesta parte da discussão, a investigadora procura que os alunos percebam que, na expressão em causa, o símbolo utilizado corresponde sempre ao mesmo valor numérico. Tendo em conta esta exploração coletiva, alguns alunos sugerem que a expressão que traduzirá o que escreveram em linguagem natural será a seguinte:



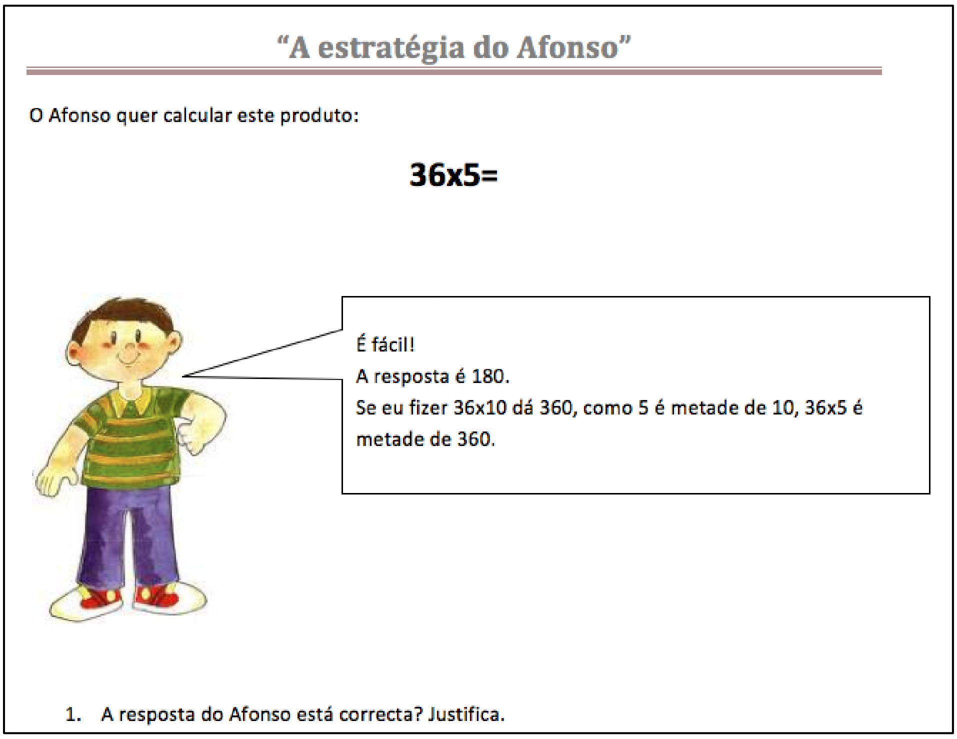
$$? \times 8 = 2 \times (? \times 4)$$

Figura 7.9 - Generalização em linguagem matemática, feita coletivamente, na tarefa 13.

7.1.2 Tarefa 15 – “A estratégia do Afonso”

A décima quinta tarefa da experiência de ensino (Anexo 3) também explorava uma situação de cálculo envolvendo as relações numéricas de dobro e metade (Figura 7.10). No entanto, nesta pretendia-se explorar a relação inversa da tarefa anterior: a multiplicação por cinco ser equivalente a metade da multiplicação por 10. Pretendia-se que, a partir do exemplo particular apresentado, os alunos reconhecessem as relações numéricas e as generalizassem para além do caso particular.

Após a apresentação da tarefa, os alunos resolveram-na autonomamente (em oito pares) e, em seguida, realizou-se o momento de discussão coletiva. A análise aqui apresentada foca-se primeiramente nas resoluções autónomas dos pares, e, em seguida, no momento discussão coletiva, indicando o nível do pensamento relacional, de generalização e de representação dos pares de alunos.



"A estratégia do Afonso"

O Afonso quer calcular este produto:

36x5=

É fácil!
A resposta é 180.
Se eu fizer 36x10 dá 360, como 5 é metade de 10, 36x5 é metade de 360.

1. A resposta do Afonso está correcta? Justifica.

Figura 7.10 – Enunciado da tarefa 15 "A estratégia do Afonso".

Trabalho autónomo dos alunos

A forma como os diferentes pares de alunos (I ao VIII) percecionaram as relações numéricas foi analisada de acordo com o nível de pensamento relacional, utilizando as categorias já referidas. Pela leitura do Quadro 7.5 constata-se que todos os pares reconheceram as relações numéricas de metade e dobro no exemplo particular (EP) apresentado no enunciado da tarefa.

Quadro 7.5 – Nível de pensamento relacional dos pares de alunos na tarefa 15.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total
NR									0
EP	x	x	x	x	x	x	x	x	8
QV									0
R									0

No entanto, verifica-se que nenhum dos pares reconheceu a relação para além do caso particular apresentado. Provavelmente sugestionados pela forma como a questão foi enunciada e por esta apresentar apenas um exemplo, os alunos centraram a sua atenção na verificação da validade da estratégia, não apresentando a sua utilização em outros casos para além do apresentado.

Constata-se também que, de forma compreensível, nenhum par evidenciou qualquer tentativa de generalizar a estratégia de cálculo para outros exemplos (Quadro 7.6). Assim, nenhum dos oito pares conseguiu generalizar as relações aritméticas envolvidas (NG).

Quadro 7.6 – Nível de generalização dos pares de alunos na tarefa 15.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total
NG	x	x	x	x	x	x	x	x	8
A									0
F									0
C									0
G									0

Consequentemente, cruzando o nível de pensamento relacional com o nível de generalização (Quadro 7.7), verifica-se que os oito pares reconheceram a relação apenas no exemplo particular apresentado no enunciado da tarefa (EP), e desta forma nenhum dos pares evidenciou a expressão da generalização dessa relação (NG).

Quadro 7.7 – Relação entre o nível de pensamento relacional e o nível de generalização dos pares de alunos na tarefa 15.

		Nível de generalização				
		NG	A	F	C	G
Nível de pensamento relacional	NR					
	EP	8				
	QV					
	R					

Como a análise, no que respeita aos tipos de representação, foca-se na generalização das relações e tendo em conta que, nesta tarefa, não houve qualquer tentativa de generalização, não se consideram também os tipos de representação dos pares de alunos. Refira-se, no entanto, que todos os pares explicaram a estratégia de cálculo, sem a generalizarem, usando a linguagem natural.

Discussão coletiva

No momento de discussão coletiva da tarefa, o par Carolina e António (II) foi o primeiro a apresentar a sua resolução (Figura 7.11). Estes alunos usaram algoritmos para mostrar que a resposta do Afonso estava correta, apresentando inclusivamente o algoritmo de $10:2$ para indicar que a metade de 10 é cinco. Este par apenas aplicou a relação aritmética no exemplo apresentado (EP), não expressando qualquer nível de generalização (NG) da estratégia de cálculo.

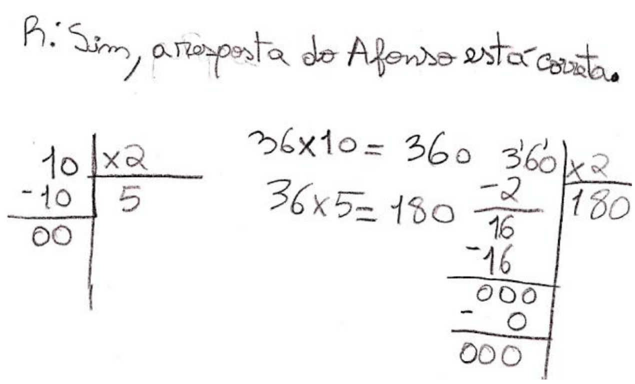


Figura 7.11 – Resolução do par Carolina e António (II) da tarefa 15.

Em seguida, o par João V. e Lawry (VIII) foi apresentar a sua forma de resolução (Figura 7.12). Embora este par, tal como os outros, não tenha expressado a estratégia para outros exemplos e, desta forma, não tenha enunciado um nível de generalização, apresentou uma representação esquemática (Dg/E).

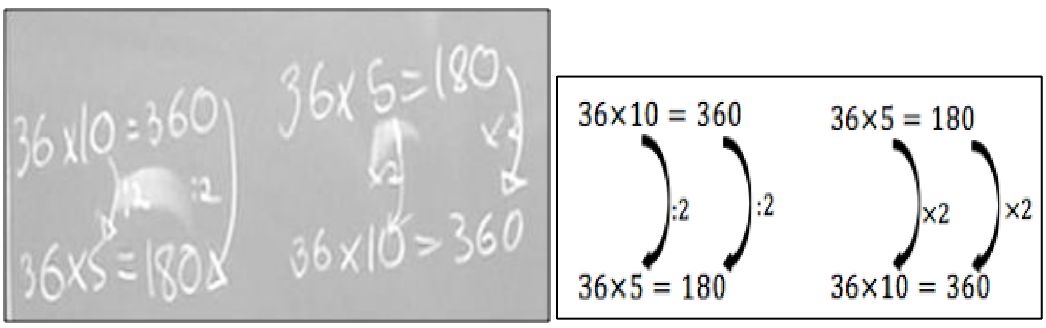


Figura 7.12 – Resolução apresentada pelo par João V. e Lawry (VIII) da tarefa 15.

Esta resolução possibilitou uma exploração coletiva da relação aritmética de dobro e metade usada na estratégia de cálculo. A investigadora conduziu a discussão no sentido de os alunos perceberem a facilidade de usar a multiplicação por 10 e também evidenciar a utilização das operações inversas da multiplicação e da divisão.

> João V. – Então, nós aqui fizemos... O Afonso foi fazer o dobro e deu 360. E depois para fazer a resposta fez 360 a dividir por dois para saber que dá 180. (...) Então, eu aqui fiz a conta e dá 360 (referindo-se a 36×10).
> Investigadora – Como é que sabes?
> João V. – Porque 36 vezes 10 dá 360.
> Investigadora – Como é que tu sabes fazer essas contas tão facilmente?
> João V. – Ah…
> Investigadora – Estás a multiplicar por quanto?
> João V. – Por 10.
> Investigadora – Por 10. E quando multiplicamos por 10 é fácil?
> João – Ah…
> Investigadora – É fácil ou não?
> Vários alunos – É.
> Investigadora – Por que é que é fácil?
> Rita – Acrescenta-se sempre um zero.
> João V. – Então, ele para saber o resultado da conta 36 × 5 foi fazer o dobro que deu 360. Depois fez uma conta de dividir, 360 a dividir por dois que deu 180.
> Investigadora – Mas, tu aí, depois disso tudo, chegaste a uma conclusão engraçada dessas relações. És capaz de ler o que está aí e as relações que estão aí?
> João V. – Esta é a multiplicação e esta é a divisão.
> (...)
> Investigadora – Quando multiplicas por 10 o resultado vai ser o quê em relação a quando multiplicas por cinco?
> João Vago – O dobro.

Após esta explicação, Carolina, do par que apresentou anteriormente, refere que as duas formas de resolução são idênticas, o que suscita na turma uma discussão sobre os dois tipos de representação. Gonçalo, por exemplo, considera as duas resoluções diferentes e explica porquê:

> Gonçalo – É assim, ali a Carolina só fez as contas e os resultados e ali é uma coisa completamente diferente porque o João V. fez o dobro e a metade.
> Investigadora – O João V. e a Lawry mostraram que havia ali uma relação de dobro e metade.
> Gonçalo – Aqui (referindo-se à resolução de Carolina e António) só fizeram resultados e respostas.

Em seguida, a investigadora procurou que os alunos generalizassem a estratégia de cálculo através da linguagem natural. O excerto seguinte mostra como alguns alunos conseguiram fazê-lo, sem dificuldade:

Investigadora – Quem é que é capaz de explicar por palavras a estratégia do Afonso?
Fábio – Ele para saber a tabuada do cinco fez metade da tabuada do 10.
Rita – Ele fazendo a tabuada do 10, se a dividir vai conseguir a tabuada do cinco.
Investigadora – Se a dividir por quanto? Tens de explicar isso. Não podes pôr só dividir, podes dividir por cinco, por dois, por três…
Rita – A dividir por dois.

Desta forma, a generalização da estratégia de cálculo em linguagem natural foi expressa do seguinte modo: “Para descobrirmos a tabuada do cinco fazemos metade da tabuada do 10”. Embora no trabalho autónomo dos alunos não tenha sido evidenciado qualquer tentativa de generalização, a exploração coletiva permitiu explorar a relação numérica de forma a evidenciar-se um nível de generalização contextual (C). Neste nível de generalização, a relação numérica é expressa numa regra geral, com a nomeação da indeterminação, mas ainda suportada pela descrição do contexto das tabuadas em causa.

Quando lhes foi solicitado que traduzissem essa regra geral para linguagem matemática, alguns alunos continuaram a usar exemplos particulares da estratégia de cálculo. A investigadora volta a insistir que pretendia que a expressão fosse válida para todos os casos e não só para alguns, referindo que deve ser usada “para qualquer número”.

Para representar “qualquer número” alguns alunos sugeriram a utilização de um símbolo não numérico. De início, propuseram a utilização do “ponto de interrogação” que já tinham usado na tarefa descrita anteriormente, mas também apresentaram outras representações pictóricas. No entanto, tiveram dificuldade em representar a metade de “qualquer número”, sugerindo representações em que desenhavam metade do símbolo, como mostra a figura seguinte:

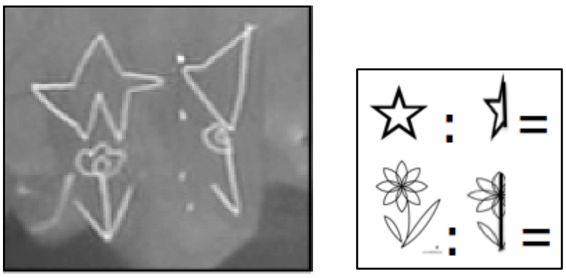
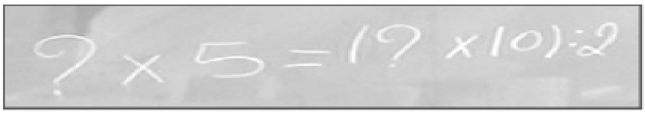


Figura 7.13 – Representação em linguagem matemática, feita pelo Henrique, na tarefa 15.

Para centrar os alunos na representação correta daquilo que haviam expressado em linguagem natural, a investigadora retomou a exploração do produto 36×5. Desta forma, conduziu a discussão para a exploração do que tinham feito com a resolução desse produto. O excerto seguinte é ilustrativo desse momento da aula:

> Investigadora – Nós ali tínhamos 36×5. Fizemos trinta e seis vezes...
> Rita – Trinta e seis vezes dez.
> Investigadora – Trinta e seis vezes dez e depois fizemos o quê?
> Rita – Dividimos por dois.
> Investigadora – Então, como é que a gente pode pôr? Qualquer número vezes cinco é igual...
> Fábio – É igual a metade.
> Investigadora – O que é que a gente fez primeiro?
> Gonçalo – Multiplicou por dez.
> Investigadora – Multiplicou por dez. Ele fez trinta e seis vezes dez. Mas isto (apontando para $36 \times 5 = 36 \times 10$) é igual?
> Vários alunos – Não.
> Fábio – Pois não. Depois fez a metade.
> Investigadora – Fez a metade. E isso quer dizer o quê? Fez a metade disto (apontando para 36×10). Como é que se representa metade disto?
> Rita – A dividir por dois.

Nesse momento é escrita no quadro a seguinte expressão numérica: $36 \times 5 = (36 \times 10): 2$. A partir do recurso a esta expressão numérica, que servira de base para a exploração da estratégia de cálculo, os alunos demonstraram uma maior facilidade em traduzir a generalização em linguagem matemática. Desta forma, Rita representa a generalização em linguagem matemática, da seguinte forma:



$$?\times 5 = (?\times 10): 2$$

Figura 7.14 – Expressão da generalização em linguagem matemática feita pela Rita, na tarefa 15.

A partir da representação de diferentes símbolos utilizada anteriormente por alguns alunos, Fábio propõe que aquela expressão também poderia ser escrita usando outros símbolos. Assim, apresentou o seguinte exemplo no quadro:

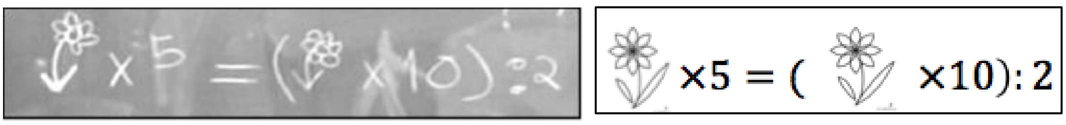


Figura 7.15 – Expressão da generalização em linguagem matemática, feita pelo Fábio, na tarefa 15.

Neste momento, a utilização dos símbolos na igualdade numérica conduz a turma a uma discussão sobre o seu significado. Assim, na sua primeira intervenção, Carolina começa por conceber o ponto de interrogação com valor de incógnita, atribuindo-lhe valores específicos. No entanto, Fábio ao referir que o símbolo pode ter o valor de “qualquer número” revela já a emergência de uma conceção de número generalizado.

> Carolina – O ponto de interrogação pode valer três e a flor pode valer quatro.
> Investigadora – Isto que escreveu a Rita pode ser escrito como escreveu o Fábio. Porque o ponto de interrogação ou a flor têm o valor de...
> Fábio – Qualquer número.
> Carolina – Mas flor vezes cinco igual a ponto de interrogação vezes dez a dividir por dois, isso não pode ser.

Para além disso, na sua última intervenção, Carolina refere-se à utilização de diferentes símbolos na mesma expressão numérica. A aluna reconhece, assim, que diferentes símbolos teriam valores diferentes e que a sua utilização nesta expressão numérica em particular não seria válida.

Fábio consegue ainda generalizar a relação aritmética para outras tabuadas, utilizando as noções de dobro e metade corretamente. Também Rita enuncia, de modo informal, a propriedade comutativa da multiplicação.

> Fábio – Oh, professora, dá para outros números. Se for flor vezes três igual a flor vezes seis a dividir por dois. E depois também dá para o quatro e para o oito. E com o um e o dois.
> Rita – Professora, mas também dá para fazer ao contrário. Onde está a flor podíamos pôr o cinco e onde está o cinco podíamos pôr a flor.
> Investigadora – Sim, porque flor vezes cinco é a mesma coisa que...
> Vários alunos – Cinco vezes flor.

Desta forma, Fábio e Rita conseguiram expressar a generalização da relação aritmética de dobro e metade para além do contexto das tabuadas do 10 e do cinco exploradas na tarefa.

7.1.3 Síntese

As tarefas da segunda sequência apresentadas exploravam estratégias de cálculo que envolviam as relações numéricas de dobro e metade, enquadradas num contexto de promoção do pensamento relacional. Tinham como objetivo principal o reconhecimento dessas relações e a sua generalização para além dos casos particulares apresentados.

Relativamente ao nível de pensamento relacional evidenciado pelos alunos pode constatar-se que as duas tarefas promoveram a exploração dos casos particulares apresentados. Assim, na primeira tarefa – "Calcular usando o dobro" – os grupos de alunos utilizaram, na sua grande maioria, os casos particulares para identificar as relações numéricas (EP). Nesta tarefa, apenas dois grupos evidenciaram usar os casos particulares com sentido de quase-variável, não se centrando apenas neles e encarando-os como exemplos da relação aritmética (QV). Na segunda tarefa – "A estratégia do Afonso" – todos os pares de alunos reconheceram a relação numérica apenas no caso particular apresentado (EP).

No que respeita ao nível de generalização, apenas na primeira tarefa os alunos evidenciaram algum nível de generalização. Assim, sete dos oito grupos apresentaram um nível de generalização aritmética (A), detetando a comunalidade entre os casos apresentados sem a estender para quantidades indeterminadas e, desta forma, sem definir uma regra geral da relação aritmética. Apenas um grupo conseguiu um nível superior de generalização, evidenciando um nível factual (F) onde a indeterminação aparece, mas não é nomeada, e os casos particulares são usados como exemplos, com sentido de quase-variável.

Relacionando o nível de pensamento relacional com o nível de generalização evidenciados pelos alunos, constata-se que, na primeira tarefa, os níveis de pensamento relacional centrados nos exemplos particulares (EP) promoveram, na sua maioria, níveis de generalização aritmética (A). Os poucos casos (dois) de níveis de pensamento relacional superiores conduziram, num caso, a um nível de generalização factual (F), e, no outro caso, ao mesmo nível de generalização aritmética (A). Na segunda tarefa, nenhum par de alunos conseguiu expressar qualquer nível de generalização por se ter centrado apenas na explicação do caso particular apresentado no enunciado da tarefa.

Relativamente aos tipos de representação, apenas foram considerados na primeira tarefa devido ao facto de na segunda os alunos não terem apresentado qualquer tentativa de generalização. Assim, os alunos utilizaram maioritariamente a linguagem natural para expressar a generalização da relação aritmética da primeira tarefa. Em simultâneo, três grupos usaram também uma representação numérica.

Tendo em conta estes dados, importa atender às características das tarefas exploradas. Assim, enquanto na primeira tarefa eram apresentados diferentes exemplos da estratégia de cálculo, na segunda apenas se enunciava um exemplo. Desta forma, a primeira tarefa parece ter sido mais promotora da expressão de generalização do que a segunda. Os dados mostram que, na primeira tarefa, todos os alunos evidenciaram uma generalização de nível, pelo menos, aritmético, enquanto na segunda tarefa nenhum dos pares de alunos empreendeu qualquer nível de generalização da relação aritmética.

No que concerne à exploração das tarefas em sala de aula e, mais concretamente, aos momentos de discussão coletiva apresentados, constata-se que, em ambas as tarefas, alguns alunos conseguiram evidenciar níveis de pensamento relacional e de generalização superiores aos apresentados durante o trabalho autónomo. De facto, a condução das tarefas feita pela investigadora promoveu a exploração das relações aritméticas no sentido de as tornar mais explícitas e mais gerais. Em ambas as explorações se partiu da análise dos casos particulares apresentados nas estratégias de cálculo e, em ambas, se promoveu a sua utilização para além desses casos, através do sentido de quase-variáveis.

Nos momentos de discussão coletiva as relações aritméticas foram expressas em linguagem natural evidenciando um nível de generalização contextual (C), por estarem ancoradas à descrição dos contextos específicos das tabuadas em causa. Nesses momentos foi ainda promovido, pela investigadora, a tradução da expressão da relação aritmética da linguagem natural para a linguagem matemática. Na expressão em linguagem matemática surgiram oportunidades de iniciar um percurso de apreensão da simbolização. Tendo em conta que, partindo de casos particulares e usando-os com sentido de quase-variável, foi possível explorar outros valores que mantinham verdadeiras as relações numéricas, tornou-se necessário representar essa variação de quantidades. Assim, foi promovida a utilização de um símbolo particular (o sinal de interrogação) já utilizado em uma tarefa anterior com sentido de incógnita. A utilização desse símbolo suscitou ainda, por parte de alguns alunos, a criação de outros símbolos, idiossincráticos. A utilização de simbologia própria surgiu, assim, alicerçada à necessidade de representar um número generalizado em igualdades numéricas. Desta forma, alguns alunos começaram a denominar o símbolo como representante de “qualquer número”, promovendo a passagem da conceção de um número desconhecido como incógnita para a conceção de número generalizado.

Por último, importa referir que a introdução da simbologia matemática possibilitou ainda a exploração de questões relacionadas com o sinal de igual enquanto símbolo relacional, ao invés de ser associado à realização de um cálculo, assim como a ampliação da análise das próprias relações aritméticas. Relativamente a este último aspeto, é interessante perceber que o facto de os alunos terem apresentado dificuldades na escrita simbólica de “metade de um número qualquer” possibilitou a exploração do próprio significado aritmético dessa relação numérica.

7.2 A exploração da variação de quantidades – Sequência III

Da sequência III são analisadas as explorações dos alunos de duas tarefas – “Os cromos da Ana e do Bruno” e “Descobre A e B” – vigésima primeira e vigésima segunda tarefas da experiência de ensino, respetivamente. A vigésima segunda tarefa é constituída por duas partes que são apresentadas separadamente.

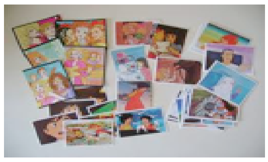
7.2.1 Tarefa 21 – “Os cromos da Ana e do Bruno”

A tarefa (Anexo 3) explorava uma igualdade com duas quantidades desconhecidas, enquadrada num contexto que pretendia ser significativo para a interpretação pelos alunos dos elementos envolvidos nessa igualdade e que é sucintamente apresentado na Figura 7.16. O principal objetivo da tarefa era que os alunos reconhecessem e expressassem a relação entre as quantidades desconhecidas A e B, envolvidas na igualdade, de modo a enunciarem uma regra geral. Desta forma, esta tarefa abordava uma relação aritmética numa igualdade, enquadrando-se num contexto de pensamento relacional, mas constituindo também uma transição para a abordagem das relações funcionais por envolver uma iniciação à compreensão da forma como os valores de duas grandezas se relacionam.

Na introdução da tarefa foi explorado o seu contexto com a turma, dramatizando a situação com os alunos, procurando-se que estes atribuíssem significado aos diferentes elementos envolvidos na igualdade. As duas primeiras questões da tarefa pediam aos alunos que atribuíssem diferentes valores a A e B de forma a manter a igualdade, e a terceira questão impelia-os a focarem-se na relação entre esses valores. Após o primeiro momento de trabalho autónomo, realizado a pares, procedeu-se à discussão coletiva.

A análise realizada foca-se, primeiramente, na forma como os nove pares reconheceram e expressaram a relação entre os valores de A e B e, posteriormente, no momento da discussão coletiva.

"Os cromos da Ana e do Bruno"



A Ana e o Bruno estão a fazer uma colecção de cromos. No domingo passado, a avó ofereceu a cada um deles a mesma quantidade de cromos para colarem nas suas cadernetas. A Ana colou 18 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa A. O Bruno colou 20 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa B.

Podemos representar **a quantidade de cromos que a Ana tem**, da seguinte forma:

18 + Ⓐ

Número de cromos colados na caderneta — cromos guardados na caixa A

Podemos representar **a quantidade de cromos que o Bruno tem**, da seguinte forma:

20 + Ⓑ

Número de cromos colados na caderneta — cromos guardados na caixa B

Como os dois meninos têm o mesmo número total de cromos, podemos construir a seguinte igualdade:

18 + Ⓐ = 20 + Ⓑ

Figura 7.16 – Contexto da tarefa 21 "Os cromos da Ana e do Bruno".

Trabalho autónomo dos alunos

A forma como os diferentes pares de alunos (I ao IX) reconheceram a relação entre as quantidades desconhecidas A e B foi analisada de acordo com o nível de pensamento relacional demonstrado (Quadro 7.8).

Quadro 7.8 – Nível de pensamento relacional dos pares de alunos na tarefa 21.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Total
			-				-			
NR									x	1
EP										0
QV								x		1
R	x	x		x	x	x				5

Pela leitura do Quadro 7.8, constata-se que, dos nove pares, cinco conseguiram expressar a relação para além dos casos particulares, evidenciando um nível relacional (R) na apreensão da relação numérica presente. Dois pares (III e VII) responderam incorretamente e um (IX) não identificou a relação entre os valores A e B. Ainda, um dos pares (VIII) reconheceu a relação nos exemplos particulares, mas usando-os com sentido de quase-variáveis (QV).

Quadro 7.9 – Nível de generalização dos pares de alunos na tarefa 21.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Total
			-				-			
NG									x	1
A								x		1
F										0
C	x	x		x	x	x				5
G										0

Cinco pares conseguiram generalizar algebricamente (Quadro 7.9), embora usando a descrição do contexto da situação (C). Um dos pares (VIII) apresentou um nível de generalização aritmética (A) por apenas identificar a comunalidade nos casos particulares, não fazendo uma extensão a quantidades desconhecidas. Um par (IX) não reconheceu a comunalidade entre os casos, não revelando tentativas de generalização (NG).

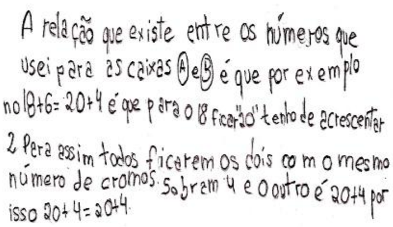
Quadro 7.10 – Relação entre o nível de pensamento relacional e o nível de generalização dos pares de alunos na tarefa 21.

		Nível de generalização				
		NG	A	F	C	G
Nível de pensamento relacional	NR	1				
	EP					
	QV		1			
	R				5	

Analisando a relação entre o nível de pensamento relacional e o nível de generalização (Quadro 7.10) constata-se que os cinco pares que reconheceram a relação (R) conseguiram um nível de generalização contextual (C). O par que reconheceu a relação nos exemplos particulares, usando-os com sentido de quase-variável, apenas apresentou um nível de generalização aritmética (A). E, naturalmente, o par que não reconheceu a relação também não apresentou qualquer tentativa de generalização. Neste quadro de sistematização excluíram-se os dois pares que apresentaram respostas incorretas.

Apresentam-se dois exemplos de resoluções dos alunos que mostram o nível de pensamento relacional e de generalização. Como estes exemplos não foram apresentados no momento de discussão coletiva, considera-se pertinente apresentá-los nesta secção.

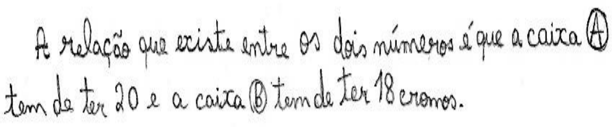
O par João V. e Lawry (VIII) evidencia o reconhecimento da relação nos casos particulares (Figura 7.17), considerando-os como “exemplos”, ou seja, usando-os com sentido de quase-variáveis (QV). Embora a sua expressão escrita não seja muito clara devido à ausência de sinais de pontuação, pode perceber-se que este par usa o exemplo particular $18 + 6 = 20 + 4$ para mostrar a relação aritmética que apreendeu nos casos particulares. Ao referir que "para o 18 ficar 20, tenho de acrescentar 2" e ainda "para assim ficarem os dois com o mesmo número de cromos sobram 4 e o outro é $20 + 4$ por isso $20 + 4 = 20 + 4$", percebe-se que os alunos usam a compensação aritmética $18 + 2 = 20$ e depois, para manter a igualdade, referem que "sobram 4", fazendo $18 + 2 + 4 = 20 + 4$. Usando um exemplo particular, percebe-se que estes alunos apreenderam a relação numérica para além desse caso particular, usando assim o sentido de quase-variável, mas sem conseguir ainda evidenciar a generalidade dessa relação. Desta forma, também quanto ao nível de generalização se reconhece que o par não consegue estender a comunalidade identificada entre os casos para quantidades indeterminadas, não apresentando uma regra geral dessa relação e evidenciando, assim, um nível de generalização aritmética (A).



A relação que existe entre os números que usei para as caixas A e B é que[,] por exemplo[,] no $18 + 6 = 20 + 4$ é que para o 18 ficar "20" tenho de acrescentar 2[,] para assim todos ficarem os dois com o mesmo número de cromos[,] sobram 4 e o outro é 20+4[,] por isso $20 + 4 = 20 + 4$.

Figura 7.17 – Resolução do par João V. e Lawry (VIII) da tarefa 21.

A resolução do par (IX) que se apresenta em seguida (Figura 7.18) mostra que estes alunos, contrariamente ao par anterior, centraram-se apenas num caso particular e não conseguiram identificar a relação aritmética envolvida, apresentando uma resposta que se situa num nível não relacional (NR). Da mesma forma, não identificando a comunalidade entre os casos possíveis para a igualdade, este par não apresenta qualquer tentativa de generalização (NG).



A relação que existe entre os dois números é que a caixa A tem de ter 20 e a caixa B tem de ter 18 cromos.

Figura 7.18 – Resolução do par Diogo e Daniel (IX) da tarefa 21.

No que respeita aos tipos de representação (Quadro 7.11), os seis pares que evidenciaram algum nível de generalização da relação expressaram-no unicamente através da linguagem natural (LN). As representações dos restantes três pares não foram consideradas porque, nos primeiros dois casos, as resoluções apresentadas não estavam corretas e, no último caso, não evidencia um nível de generalização.

Quadro 7.11 – Tipo de representação usado pelos pares de alunos na tarefa 21.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Total
			-				-		-	
LN	x	x		x	x	x		x		6
N										0
D										0
Dg/E										0
T										0
S										0
I										0
A										0
Total	1	1	-	1	1	1	-	1	-	

Discussão coletiva

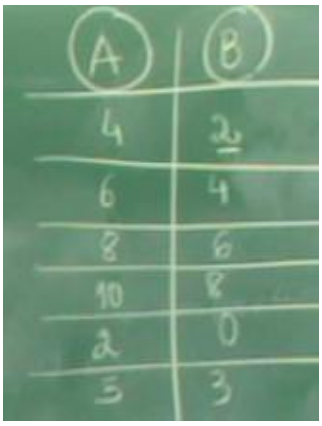
No momento de discussão coletiva, o par Gonçalo e Joana (V) partilhou com a turma a forma como descobriu a relação entre as quantidades A e B, escrevendo no quadro: “A relação que existe entre os números que usei para as caixas A e B é que a B tem sempre menos dois cromos do que a A”. Assim, este par mostra como reconhece a relação (R) entre as quantidades desconhecidas A e B, evidenciando um nível de generalização contextual (C), que se fundamenta na descrição do contexto da situação. Como forma de representação dessa relação usa a linguagem natural (LN).

Após ser discutida a resolução deste par, um aluno, Fábio, sem que isso lhe tenha sido solicitado, refere que a relação entre os números relativos às caixas A e B poderia ser escrita em linguagem matemática. Quando lhe é pedido para escrever no quadro aquilo a que se referia, o aluno apresenta a seguinte expressão:

B-2=A

Figura 7.19 – Representação em linguagem matemática apresentada por Fábio na tarefa 21.

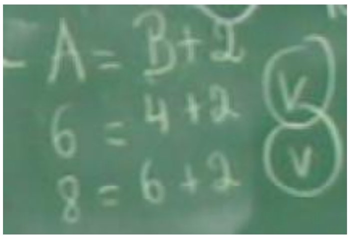
A partir desta sugestão de Fábio, a investigadora propõe à turma a exploração de uma tabela para diferentes valores de A e B. Desta forma, pretende não só discutir com a turma a representação proposta pelo aluno, como tornar mais explícita a relação entre os valores das variáveis A e B (Figura 7.20).



A	B
4	2
6	4
8	6
10	8
2	0
5	3

Figura 7.20 – Tabela explorada no coletivo na tarefa 21.

A partir da exploração da tabela, alguns alunos concluíram que a representação apresentada por Fábio não estaria correta, sugerindo a expressão $A = B + 2$. Esta representação foi experimentada para alguns valores de A e B, confirmando a igualdade e reafirmando a relação existente entre as quantidades representadas por A e B (Figura 7.21).



A=B+2
6=4+2 V
8=6+2 V

Figura 7.21 – Representação da relação entre A e B, a partir da discussão da tabela, na tarefa 21.

Em seguida, Rita e Gonçalo expressam a relação entre as duas variáveis de forma bastante clara. Estes alunos reconhecem ainda a dependência dessa relação com os valores 20 e 18 na compensação aritmética.

> Rita – A relação que existia entre os números que usei para as caixas A e B é que na caixa A há sempre mais dois cromos do que na caixa B. Porque o 20 é mais dois cromos do que o 18, por isso é sempre mais dois cromos.
> Investigadora – Porquê o “mais dois”? Porque é que a caixa A tem sempre mais dois do que a caixa B?
> Gonçalo – Porque a diferença é de dois.
> Investigadora – E porque é que a caixa B tem sempre menos dois do que a caixa A?
> Rita – Ali no dezoito mais A e vinte mais B, o 18 é menos dois do que o 20.

No momento de sistematização, a investigadora explícita, mais uma vez, a relação entre as quantidades presentes na igualdade, mas, desta vez, optando pela exploração de um diagrama com setas (Figura 7.22). Este diagrama foi explorado no sentido de tornar mais clara a relação de compensação aritmética na igualdade e a forma como os valores desconhecidos de A e B se relacionavam, ou seja, a relação entre as duas variáveis.

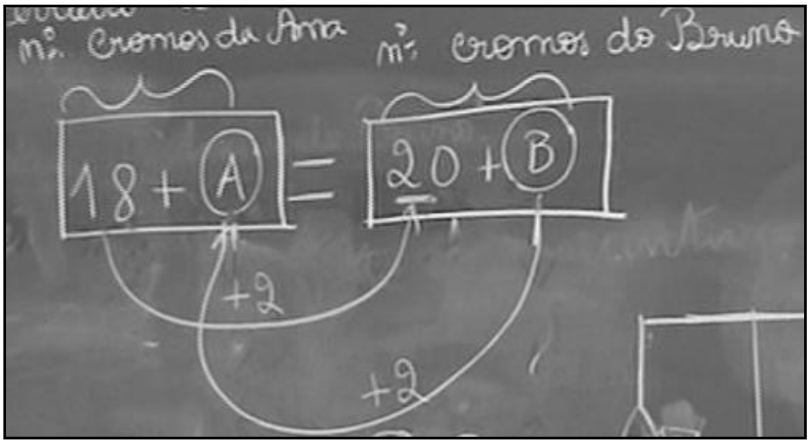


Figura 7.22 – Representação da relação de igualdade durante a discussão coletiva na tarefa 21.

Também foi usado o modelo da balança, para ilustrar como a relação de igualdade poderia ser vista como uma relação de equilíbrio. Foram atribuídos valores para cada prato da balança, usando o contexto das medidas de massa com diversas possibilidades para manter o equilíbrio. Em seguida, o contexto da tarefa foi transposto para a balança e foram experimentadas diversas possibilidades de valores para aquela compensação aritmética.

7.2.2 Tarefa 22 – "Descobre A e B"

A segunda tarefa desta sequência em análise intitulava-se "Descobre A e B" (Anexo 3) e, em continuidade com a primeira, apresentava uma igualdade envolvendo duas quantidades desconhecidas, mas, desta vez, com as operações de multiplicação e divisão (Figura 7.23). Pretendia-se que os alunos reconhecessem a relação entre os valores das quantidades desconhecidas de forma a manter a igualdade. Na primeira parte da tarefa (alíneas *a* e *b*) era pedido aos alunos que identificassem a relação numérica de dobro e metade e, na segunda parte da tarefa (alínea *c*), que identificassem a relação numérica de triplo e terça parte em uma outra igualdade.

Para cada uma das partes da tarefa, a análise foca-se na produção dos grupos no momento de trabalho autónomo e, posteriormente, nos momentos de discussão coletiva.

"Descobre Ⓐ e Ⓑ"

1. Observa a seguinte igualdade:

$$6 \times Ⓐ = 12 \times Ⓑ$$

a) Coloca números nas caixas Ⓐ e Ⓑ de modo a teres três afirmações verdadeiras.

b) Que relação existe entre os números que colocaste nas caixas Ⓐ e Ⓑ?

c) Se a igualdade for a seguinte, que relação poderá existir entre os números das caixas Ⓐ e Ⓑ?

$$15 \times Ⓐ = 5 \times Ⓑ$$

Figura 7.23 – Enunciado da tarefa 22 "Descobre A e B".

Primeira parte da tarefa – Trabalho autónomo dos alunos

A primeira parte da tarefa explorava a relação numérica de dobro e metade na igualdade. O Quadro 7.12 indica o nível do pensamento relacional exibido por nove pares de alunos, nesta primeira parte da tarefa.

Quadro 7.12 – Nível de pensamento relacional dos pares de alunos na primeira parte da tarefa 22.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Total
NR										0
EP							x		x	2
QV										0
R	x	x	x	x	x	x		x		7

Constata-se que, dos nove pares, sete conseguiram expressar a relação para além dos casos particulares, evidenciando a generalidade da relação (R) (Quadro 7.12). Apenas dois pares se centraram em casos particulares (EP), não apreendendo a generalidade da relação para além desses casos.

Quadro 7.13 – Nível de generalização dos pares de alunos na primeira parte da tarefa 22.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Total
NG										0
A							x		x	2
F										0
C	x	x		x	x	x		x		6
G			x							1

Seis dos nove pares (Quadro 7.13) conseguiram expressar a generalização da relação, nomeando a indeterminação, envolvendo a descrição do contexto da situação (C). Estes pares também conseguiram expressar uma regra geral da relação. Dois pares exibiram um nível de generalização aritmética (A), por apenas terem reconhecido a comunalidade entre os casos conhecidos, não a estendendo para além desses casos e não definindo uma regra geral. Um par conseguiu expressar um nível superior de generalização, não se centrando na descrição do contexto da situação e conseguindo enunciar de forma global a relação aritmética (G).

Quadro 7.14 – Relação entre o nível de pensamento relacional e o nível de generalização dos pares de alunos na primeira parte da tarefa 22.

		Nível de generalização				
		NG	A	F	C	G
Nível de pensamento relacional	NR					
	EP		2			
	QV					
	R				6	1

Analisando a relação entre o nível de pensamento relacional e o nível de generalização (Quadro 7.14) constata-se que todos os pares que reconheceram a relação aritmética também evidenciaram um nível de generalização algébrica, seis dos quais recorrendo à descrição do contexto da situação (C) e um par enunciando a generalização a um nível global (G). Os dois pares que apenas reconheceram a relação nos exemplos particulares (EP) só conseguiram enunciar uma generalização de nível aritmético (A), não revelando a definição de uma regra geral.

No que respeita aos tipos de representação da relação (Quadro 7.15), verifica-se que os nove pares usaram a linguagem natural (LN) para expressar a generalização. Para além disso, dois pares usaram diagramas com setas (Dg/E) e um par usou também a tabela (T). Esse par usou, em simultâneo, três tipos de representação e outros dois pares complementaram a linguagem natural com um diagrama com setas.

Quadro 7.15 – Tipo de representação usado pelos pares de alunos na primeira parte da tarefa 22.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Total
LN	x	x	x	x	x	x	x	x	x	9
N										0
D										0
Dg/E				x	x					2
T			x							1
S										0
I										0
A			x							1
Total	1	1	3	2	2	1	1	1	1	

Discussão coletiva

Na discussão coletiva, o par Elisabete e o Miguel (I) mostrou no quadro como expressou a relação presente na situação proposta, recorrendo à linguagem natural. Miguel escreve no quadro: "A caixa A é o dobro da caixa B e a caixa B é a metade da A". Estes alunos evidenciam que reconheceram a relação (R) entre as quantidades desconhecidas A e B e expressam a generalização a um nível contextual (C). Nesta altura surgem afirmações de alguns alunos que mostram como conseguiram, para além de apreender a relação numérica entre os valores desconhecidos, chegar a uma generalização de nível global das condições que satisfazem a igualdade e identificar o conceito de variável. Os excertos seguintes são exemplo disso:

> João – A caixa A vai ser sempre o dobro da caixa B. Os números da caixa A vão ser sempre o dobro do que está na caixa B.
> Matilde – A caixa A pode ser um número qualquer, mas tem de ser sempre o dobro da caixa B.

Em seguida, a investigadora aprofundou a exploração das relações numéricas através da construção de um diagrama com setas e do recurso ao modelo da balança (Figura 7.24). O diagrama com setas foi usado para tornar explícitas as relações entre os valores numéricos seis e 12 e os consequentes valores A e B, envolvidos na compensação aritmética. No modelo da balança foram usados alguns casos particulares, atribuindo valores a A e B e realçando a direção e o valor da compensação aritmética que torna possível a igualdade.

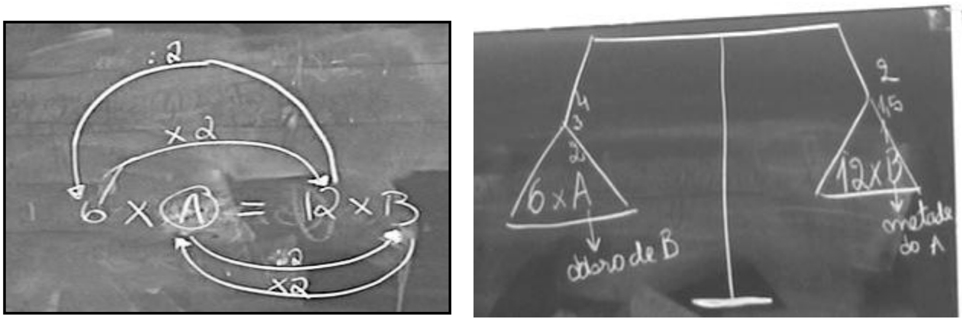
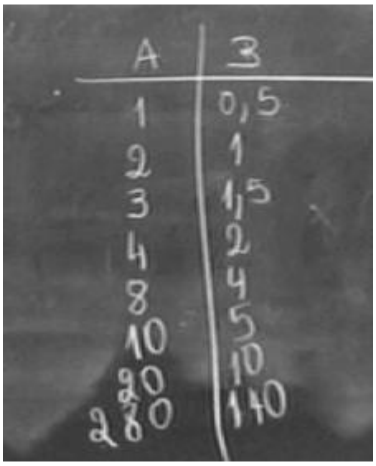


Figura 7.24 – Exploração do diagrama com setas e do modelo da balança, na primeira parte da tarefa 22.

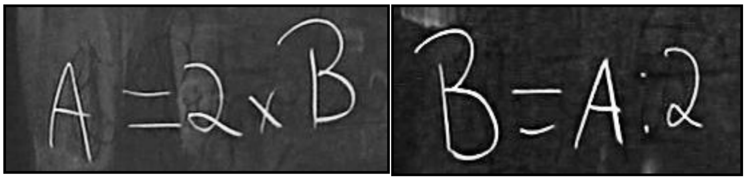
A investigadora também construiu uma tabela no quadro com duas colunas, uma para os valores de A e outra para os valores de B (Figura 7.25). Na exploração da tabela, a investigadora pretendia trabalhar com os alunos, informalmente, a noção de variável e de relação entre variáveis. Esta abordagem permitiu, assim, uma iniciação ao conceito de covariação, explorando as condições que têm de ser mantidas quando se faz variar uma das quantidades de forma a manter a igualdade. Na tabela foram explorados diferentes valores, sugeridos por alguns alunos, incluindo números racionais na representação decimal e números com três algarismos.



A	B
1	0,5
2	1
3	1,5
4	2
8	4
10	5
20	10
280	140

Figura 7.25 – Tabela explorada no coletivo, na primeira parte da tarefa 22.

Tendo em conta o trabalho realizado com as expressões simbólicas na tarefa anterior, a investigadora solicita à turma uma forma simbólica de escrever a relação existente entre os valores de A e B. Matilde vai ao quadro e escreve corretamente:



$$A = 2 \times B$$
$$B = A{:}\,2$$

Figura 7.26 – Representação do valor de A e de B feita pela Matilde na primeira parte da tarefa 22.

Segunda parte da tarefa – Trabalho autónomo dos alunos

A segunda parte da tarefa abordava uma igualdade envolvendo as relações de triplo e terça parte. Apresenta-se, em seguida, o nível do pensamento relacional dos nove pares de alunos de acordo com as categorias definidas (Quadro 7.16).

Quadro 7.16 – Nível de pensamento relacional dos pares de alunos na segunda parte da tarefa 22.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Total
									-	
NR										0
EP										0
QV										0
R	x	x	x	x	x	x	x	x		8

Constata-se que oito dos nove pares conseguiram apreender a relação aritmética de triplo e terça parte, evidenciando o nível relacional (R). Apenas um par (IX) não conseguiu apreender a relação aritmética, apresentando uma resposta incorreta que, por esse motivo, não está contabilizada no quadro acima.

Relativamente ao nível de generalização da relação (Quadro 7.17), os oito pares que responderam corretamente também conseguiram enunciar um nível global (G) da relação aritmética. Estes pares apresentaram uma regra geral, nomeando a indeterminação e não se apoiando na descrição do contexto da tarefa.

Quadro 7.17 – Nível de generalização dos pares de alunos na segunda parte da tarefa 22.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Total
									-	
TE										0
A										0
F										0
C										0
G	x	x	x	x	x	x	x	x		8

Assim, os oito pares que conseguiram reconhecer a relação aritmética (R) também conseguiram evidenciar um nível global de generalização (G) (Quadro 7.18).

Quadro 7.18 – Relação entre o nível de pensamento relacional e o nível de generalização dos pares de alunos na segunda parte da tarefa 22.

		Nível de generalização				
		NG	A	F	C	G
Nível de pensamento relacional	NR					
	EP					
	QV					
	R					8

Relativamente aos tipos de representação (Quadro 7.19), os oito pares expressaram a relação através da linguagem natural (LN). No entanto, todos os pares apresentaram em simultâneo outros tipos de representação, como a representação numérica, o diagrama com setas, a tabela e, um dos pares, a linguagem simbólica alfanumérica. A tabela e o diagrama com setas foram os tipos de representação mais utilizadas pelos pares de alunos, em simultâneo com a linguagem natural. Refira-se ainda que metade dos pares de alunos usou três tipos de representação em simultâneo e dois pares usaram quatro representações diferentes para expressar a relação.

Quadro 7.19 – Tipo de representação usado pelos pares de alunos na segunda parte da tarefa 22.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Total
									-	
LN	x	x	x	x	x	x	x	x		8
N	x	x		x			x			4
D										0
Dg/E		x	x	x	x			x		5
T	x		x	x		x	x	x		6
S										0
I										0
A			x							1
Total	3	3	4	4	2	2	3	3	-	

Apresentam-se alguns exemplos que ilustram como, nesta tarefa, os vários pares de alunos usaram diversos tipos de representação em simultâneo. A resolução seguinte (Figura 7.27) é um exemplo da forma como os alunos utilizaram corretamente mais do que uma forma de representação em simultâneo: linguagem natural, diagrama com setas e modelo da balança. No diagrama com setas, estes alunos explicitaram as relações numéricas de triplo e terça parte entre os valores A e B e também essa relação de dependência com os valores numéricos 15 e cinco. Recorrem ao modelo da balança para exemplificar o equilíbrio relativo à igualdade apresentando um caso particular da mesma. E apresentam também a generalidade da relação através da linguagem natural.

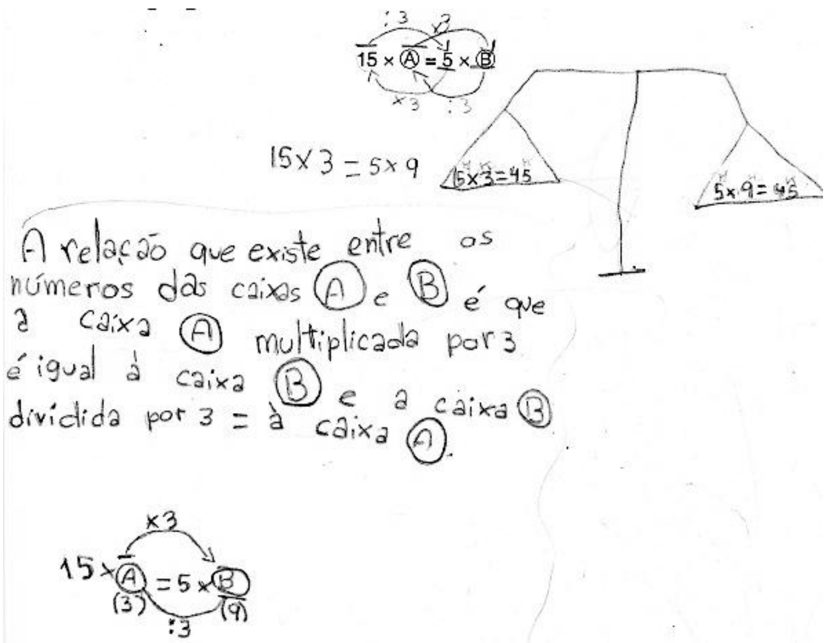


Figura 7.27 – Resolução do par Gonçalo e Joana (V) da segunda parte da tarefa 22.

No entanto, nem todos os pares utilizaram com correção todas os tipos de representação, apresentando algumas imprecisões em uma ou outra forma. Na sua resolução (Figura 7.28), o par Fábio e António (III) apresenta quatro tipos de representação: linguagem natural, diagrama com setas, tabela e linguagem simbólica alfanumérica. Este par de alunos, embora enuncie apropriadamente a generalização da relação em linguagem natural e no diagrama com setas, apenas apresenta corretamente o primeiro par de valores na tabela e engana-se na representação em linguagem simbólica, representando a relação numérica de quíntuplo e quinta parte em vez da relação de triplo e terça parte.

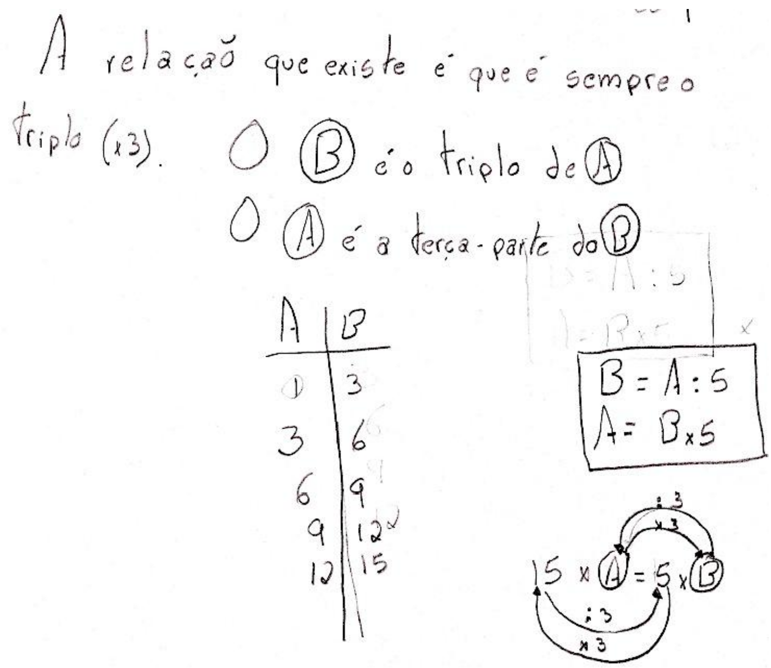


Figura 7.28 – Resolução do par Fábio e António (III) na segunda parte da tarefa 22.

Outro par (Figura 7.29) representa a construção de uma proto-tabela, com dois pares de valores, posicionando-a abaixo da igualdade presente no enunciado. Apresenta também uma tabela com duas colunas, mas apenas com os dois pares de valores que já tinha considerado. Embora o façam corretamente, percebe-se que estes alunos estão ainda a experimentar esta forma de representação.

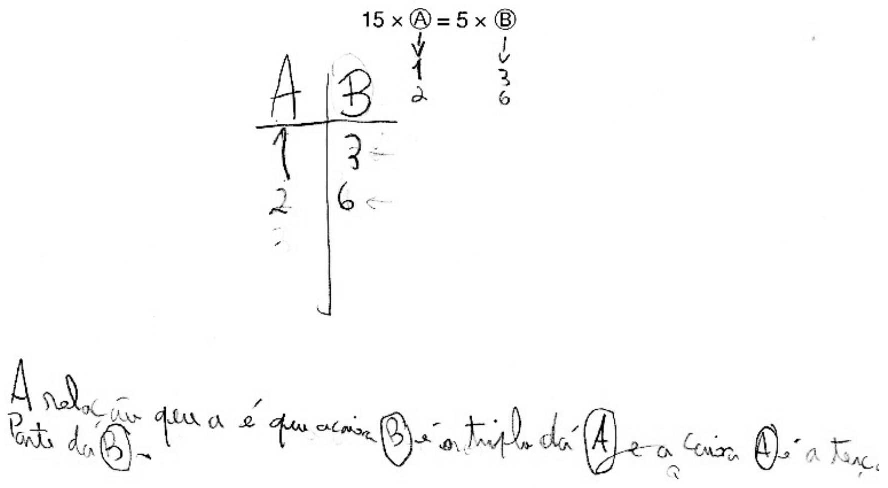


Figura 7.29 – Resolução do par João P. e Marco (VI) na segunda parte da tarefa 22.

Discussão coletiva

A discussão coletiva começa com a exploração do diagrama com setas apresentado pelo par Gonçalo e Joana (V) (Figura 7.30).

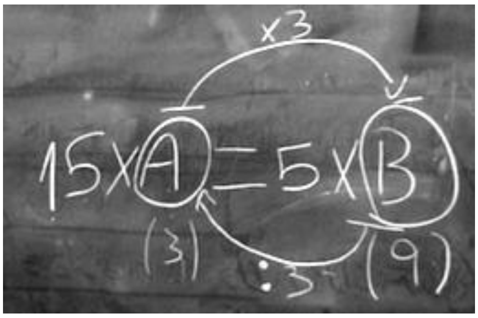
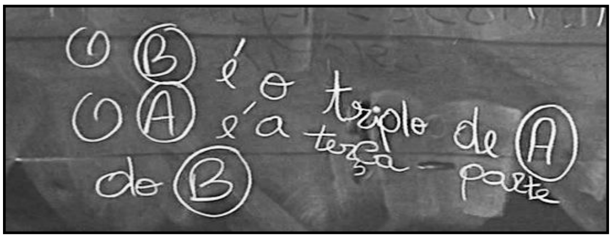


Figura 7.30 – Apresentação do diagrama com setas, feita pelo par Gonçalo e Joana (V), na segunda parte da tarefa 22.

Gonçalo explica o diagrama usando, inicialmente, um caso particular. Quando questionado pela investigadora, consegue reconhecer que a relação se mantém válida para outros números, desde que se continue a verificar a igualdade. Joana lê a resposta do par mostrando como generalizaram a relação aritmética.

Gonçalo – Este A que é o três, se multiplicarmos o três por três dá a caixa B que é o nove. E se tivermos a caixa B que é o nove e o dividirmos por três vai dar a caixa A que é o três.
Investigadora – E isso só funciona com o nove e o três?
Gonçalo – Não, dá com outros números.
Investigadora – E dá com outros, quais? Como? Para dar o que é que é preciso?
Gonçalo – Este (apontando para o cinco) vezes a caixa B tem de ser igual a este (apontando para o quinze) vezes a caixa A.
Joana (lendo a resposta da resolução do par) – A relação que existe entre os números que estão na caixa A e na caixa B é que a caixa A multiplicada por três é igual à caixa B e a caixa B dividida por três dá a caixa A.

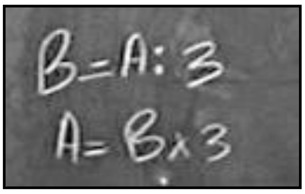
Também o par Fábio e António (III) apresenta a sua forma de resolução (Figura 7.31). António vai ao quadro e expressa corretamente a generalização da relação através da linguagem natural.



O B é o triplo de A.
O A é a terça parte do B.

Figura 7.31 – Generalização da relação em linguagem natural, feita pelo par Fábio e António (III), na segunda parte da tarefa 22.

No momento em que António apresenta simbolicamente os valores de A e B, fá-lo incorretamente: $B = A{:}\,5$ e $A = B \times 5$. Os colegas reagem, de imediato, e o par de alunos reconhece que se tinha enganado e substitui o cinco pelo três (Figura 7.32).



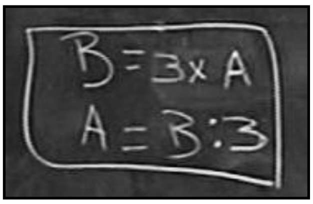
$\mathrm{B} = \mathrm{A}{:}\,3$
$\mathrm{A} = \mathrm{B} \times 3$

Figura 7.32 – Representação dos valores de A e B, feita pelo António, na segunda parte da tarefa 22.

No entanto, alguns colegas mantêm-se atentos às expressões que foram registadas por António. Uma das alunas consegue identificar o erro dos colegas, corrigindo-o:

> Rita – Aqui, como eles estão a dizer (apontando para o que os colegas escreveram em linguagem natural)... O B é o triplo... Aqui era o vezes (apontando para a expressão $B = A{:}\,3$, escrita pelo António) do A. (...) Porque eles disseram que o B é a terça parte do A.

E a mesma aluna, Rita, representa corretamente as duas expressões corrigindo as expressões apresentadas pelos colegas.



$\mathrm{B} = 3 \times \mathrm{A}$
$\mathrm{A} = \mathrm{B}{:}\,3$

Figura 7.33 – Representação dos valores de A e B, feita pela Rita, na segunda parte da tarefa 22.

Quando a investigadora questiona os alunos sobre o porquê de isso acontecer, Rita refere que "cinco vezes três é quinze e quinze a dividir por três é cinco". Matilde acrescenta ainda que "B podia ser um número qualquer, mas tinha que ser o triplo do A", expressando a generalização da relação trabalhada de um modo global.

7.2.3 Síntese

As duas tarefas da terceira sequência apresentadas exploravam igualdades numéricas com dois valores desconhecidos. Embora enquadradas num contexto de promoção do pensamento relacional, estas tarefas exploravam a relação de dependência entre duas quantidades, constituindo, assim, uma primeira abordagem às relações funcionais. Desta forma, o objetivo destas tarefas era o reconhecimento das relações aritméticas envolvidas na igualdade e a sua generalização, mas também o reconhecimento das relações de dependência entre duas variáveis. As produções resultantes do trabalho autónomo dos alunos foram analisadas de acordo com o nível de pensamento relacional exibido, mas a exploração em sala de aula encaminhava-se já para a exploração da relação entre variáveis, procurando iniciar também uma abordagem ao desenvolvimento do pensamento funcional.

Relativamente ao nível de pensamento relacional evidenciado pelos alunos pode constatar-se que as duas tarefas promoveram um crescente reconhecimento das relações aritméticas envolvidas. Assim, na primeira tarefa, mais de metade dos pares de alunos conseguiu evidenciar um nível relacional na apreensão da relação numérica (R). Um par apresentou um nível inferior de pensamento relacional, reconhecendo os exemplos particulares com sentido de quase-variável (QV) e um outro par não reconheceu a relação numérica (NR). A segunda tarefa, envolvendo as operações de multiplicação e divisão, apresentava duas partes analisadas em separado. Na primeira parte desta segunda tarefa, a grande maioria dos pares de alunos conseguiu reconhecer a relação numérica (R) e dois pares centraram-se nos casos particulares analisados (EP). Na segunda parte desta tarefa, todos os pares de alunos à exceção de um (que respondeu incorretamente), conseguiram reconhecer a relação numérica (R). Verifica-se, assim, um crescente número de alunos que conseguiu reconhecer as relações numéricas envolvidas nas tarefas analisadas desta sequência.

Relativamente ao nível de generalização, registou-se também alguma evolução dos alunos ao longo da exploração destas tarefas. Na primeira tarefa, mais de metade dos pares conseguiu apresentar um nível de generalização contextual e esse número aumentou para seis na primeira parte da segunda tarefa. Na segunda parte da segunda tarefa, oito dos nove pares apresentaram um nível de generalização global. De facto, ao longo das tarefas analisadas desta sequência, o nível de generalização dos alunos progrediu do nível contextual para o nível global.

Relacionando o nível de pensamento relacional com o nível de generalização, constata-se que à medida que os alunos começaram a identificar o nível relacional das relações aritméticas, o seu nível de generalização também se tornou mais elevado. De facto, na primeira tarefa os cinco pares de alunos que conseguiram reconhecer a relação aritmética também conseguiram um nível de generalização algébrico contextual. Na primeira parte da segunda tarefa, esse número aumentou para seis pares e um dos pares evidenciou até um nível de generalização algébrica superior, de nível global. Na segunda parte da segunda tarefa, os oito pares que reconheceram a relação aritmética apresentaram também um nível de generalização algébrico global, não se centrando na descrição do contexto da tarefa e enunciando a relação aritmética de forma mais geral. Constata-se, assim, que à medida que evolui a capacidade de os alunos reconhecerem as relações numéricas trabalhadas também evolui a sua capacidade de expressar de forma mais global a generalização das mesmas.

Relativamente ao tipo de representação, na segunda tarefa desta sequência foi notório o investimento dos alunos na experimentação de novas formas de representação da generalização das relações aritméticas, possivelmente impulsionados pelos exemplos que a investigadora explorou na primeira tarefa. Nessa tarefa, para além da linguagem natural, começaram a surgir, em simultâneo, outros tipos de representação como tabelas, diagramas com setas e até, no caso de um dos pares, uma representação alfanumérica. Na segunda parte da segunda tarefa todos os pares de alunos utilizaram, pelo menos, dois tipos de representação em simultâneo. Assim, à medida que o nível de pensamento relacional evoluiu e, consequentemente, o nível de generalização, também os tipos de representação usadas pelos alunos se tornaram mais diversificados e sofisticados.

Tendo em conta estes dados, importa atender às características das tarefas exploradas. Assim, o contexto de modelação introduzido na primeira tarefa parece ter promovido nos alunos a compreensão da igualdade apresentada, embora a mesma incluísse duas quantidades desconhecidas representadas por letras que compunham uma igualdade com símbolos alfanuméricos, situação colocada aos alunos pela primeira vez. O facto de os alunos terem conseguido atribuir significado àqueles símbolos e à situação descrita, permitiu-lhes envolver-se na resolução da tarefa. A segunda tarefa, apresentada em seguida, ancorava-se ainda na mesma perspetiva, embora sem contexto de modelação diretamente associado. De facto, a forma como os alunos se envolveram na resolução das tarefas demonstra que acederam ao significado dos elementos envolvidos nas igualdades.

No que concerne à exploração das tarefas em sala de aula e, mais concretamente, aos momentos de discussão coletiva apresentados, constata-se a importância da exploração das diferentes tipos de representação como as tabelas, o diagrama com setas e o modelo de balança. Tais representações começam a ser adotadas pelos alunos nas suas resoluções autónomas, com particular evidência na última tarefa analisada.

Também a crescente intervenção por parte de alguns alunos nos momentos de discussão coletiva se torna mais evidente no decurso das tarefas apresentadas desta sequência. Para além de apresentarem tipos de representação diferentes, os alunos que assistem às apresentações dos colegas estão atentos e, alguns deles conseguem corrigi-los quando estes apresentam resoluções com incorreções ou imprecisões.

Saliente-se ainda a introdução por parte de um aluno, Fábio, na primeira tarefa apresentada, da linguagem matemática. De facto, sem que lhe tenha sido solicitado, este aluno propõe a escrita da relação aritmética em linguagem matemática. Tendo em conta que a igualdade numérica apresentava já uma simbologia com letras (A e B, relativa às caixas de cromos), esta intervenção parece ter sido natural. Desta forma, a introdução das letras A e B parece ter facilitado e, até, provocado essa intervenção por parte do aluno, tendo em conta, também, a exploração já feita nas tarefas descritas na sequência anterior. A linguagem alfanumérica começa a ser usada no coletivo. A exploração de outros tipos de representação como a tabela, diagrama com setas e modelo de balança parece ter proporcionado uma ferramenta capaz de levar os alunos a compreenderem a relação entre as variáveis.

Desta forma, enquanto nas tarefas analisadas da sequência anterior, os alunos atribuíam à indeterminação o significado de incógnita ou de número generalizado, nestas tarefas começa a emergir a noção de variável. Enquadradas num contexto de promoção do pensamento relacional, estas tarefas parecem, assim, ter sido promotoras da exploração de importantes noções no que concerne à noção de variável e à relação entre variáveis.

7.3 A exploração de regularidades numéricas – Sequência IV

Relativamente à sequência IV é analisado o trabalho dos alunos em duas tarefas – “Pensa num número” e “Explorando calendários e tabelas” – trigésima e trigésima segunda tarefas da experiência de ensino, respetivamente. A trigésima tarefa é constituída por duas partes que são apresentadas separadamente.

7.3.1 Tarefa 30 – "Pensa num número"

A tarefa (Anexo 3) explorava regularidades numéricas que implicavam a utilização, ainda que intuitiva, de propriedades das operações e da relação entre operações inversas (Figura 7.34). Pretendia-se que os alunos reconhecessem a existência dessas propriedades e relações e as enunciassem de forma geral.

A tarefa dividia-se em duas partes, formalizadas nas questões um e dois. A primeira questão pretendia mobilizar a utilização da relação inversa entre a adição e a subtração. Na segunda questão procurava-se que os alunos reconhecessem que a multiplicação por seis e posterior divisão por dois e três eram procedimentos inversos, não alterando o número que haviam escolhido inicialmente. Esta questão envolvia também a relação entre as operações inversas, desta vez com a multiplicação e a divisão e a utilização de divisões parciais.

Em cada uma das duas partes realizou-se a apresentação da tarefa, o momento do trabalho autónomo dos grupos (em seis pares e um trio) e, em seguida, o momento de discussão coletiva. Apresentam-se, em seguida, os resultados relativos a cada uma das duas partes da tarefa, focando-se, primeiramente, nas resoluções autónomas dos grupos e, em seguida, nos momentos da discussão coletiva.

Tarefa "Pensa num número"

1. Pensa num número e obedece às diferentes indicações que te são dadas.

   1.1. Escolhe um número.

Escreve o número que escolheste.	
Adiciona 10 a esse número. Escreve a soma.	
Subtrai 10 a esse resultado.	

   1.2. Experimenta com outros números.

   1.3. Que descoberta fizeste? Porque é que isso aconteceu?

2. Experimenta agora obedecer a estas novas indicações. Descobre o que aconteceu e tira as tuas conclusões.

   2.1. A multiplicar e a dividir...

Escolhe um número e escreve-o.	
Multiplica esse número por 6.	
Agora divide por 2.	
Divide o resultado por 3.	

Conclusões

Figura 7.34 – Enunciado da tarefa 30 "Pensa num número".

Primeira parte da tarefa – Trabalho autónomo dos alunos

A forma como os diferentes grupos de alunos (I ao VII) percecionaram as relações numéricas relativas à questão um foi analisada de acordo com o nível de pensamento relacional (Quadro 7.20).

Quadro 7.20 – Nível de pensamento relacional dos grupos de alunos na primeira parte da tarefa 30.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	Total
NR								0
EP	x	x			x	x		4
QV							x	1
R			x	x				2

Pela leitura do quadro pode constatar-se que, dos sete grupos, quatro reconheceram as relações numéricas nos exemplos particulares que construíram a partir da execução dos diferentes procedimentos solicitados (EP). Um dos grupos conseguiu ainda usar esses exemplos com sentido de quase-variáveis, reconhecendo as relações para além desses casos particulares (QV). Dois grupos evidenciaram um nível relacional na apreensão das relações numéricas (R).

Relativamente ao nível de generalização da relação aritmética (Quadro 7.21), verifica-se que, dos sete grupos, quatro apenas perceberam a comunalidade entre os casos apresentados, não se referindo a quantidades indeterminadas e apresentando uma generalização de nível aritmético (A). Um grupo expressou a generalização algébrica num nível factual (F), fazendo emergir uma regra a partir dos casos particulares e dois grupos apresentaram um nível de generalização superior, não se centrando na descrição do contexto da situação e enunciando, assim, a relação presente num nível de generalização global (G).

Quadro 7.21 – Nível de generalização dos grupos de alunos na primeira parte da tarefa 30.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	Total
NG								0
A	x	x			x	x		4
F							x	1
C								0
G			x	x				2

Cruzando o nível de pensamento relacional com o nível de generalização (Quadro 7.22) evidenciado pelos alunos, constata-se que os quatro grupos que expressaram a relação nos exemplos particulares apresentados no enunciado da tarefa (EP) apenas reconheceram a comunalidade nesses casos, produzindo uma generalização aritmética (A), não algébrica, portanto. O grupo que expressou a relação para além dos casos particulares usando outros com sentido de quase-variável (QV), conseguiu produzir uma generalização algébrica de nível factual (F), definindo uma regra, embora não nomeando explicitamente a indeterminação. Os dois grupos que reconheceram o nível relacional na regularidade numérica (R), conseguiram também expressar essa relação num nível global (G), enunciando uma regra geral.

Quadro 7.22 – Relação entre o nível de pensamento relacional e o nível de generalização dos grupos de alunos na primeira parte da tarefa 30.

		Nível de generalização				
		NG	A	F	C	G
Nível de pensamento relacional	NR					
	EP		4			
	QV			1		
	R					2

No que respeita aos tipos de representação da relação aritmética (Quadro 7.23), todos os grupos a expressaram utilizando apenas a linguagem natural (LN).

Quadro 7.23 – Tipo de representação usado pelos grupos de alunos na primeira parte da tarefa 30.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	Total
LN	x	x	x	x	x	x	x	7
N								0
D								0
Dg/E								0
T								0
S								0
I								0
A								0
Total	1	1	1	1	1	1	1	

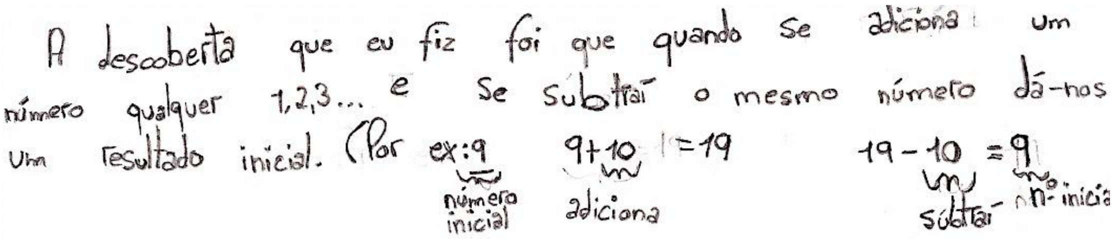
Discussão coletiva

O par da Elisabete e do Miguel (I) foi o primeiro a apresentar a sua forma de resolução da primeira parte da tarefa. Apresentam o exemplo que fizeram escolhendo o número um e explicam os procedimentos que efetuaram da seguinte forma:

> Miguel – Escrevemos o número que escolhemos, o um. Depois adicionámos 10 e deu 11. E depois subtraímos 10 e deu um. (...) Isso acontece porque somando um número mais 10 dá sempre esse número mais 10. E subtraindo esse número menos 10 vai dar o número inicial.

A resolução deste par mostra que perceberam as relações aritméticas nos exemplos trabalhados (EP), reconhecendo, assim, a comunalidade nesses casos, mas não enunciam uma regra, considerando-se um nível de generalização aritmética (A).

Nesse momento da discussão coletiva, uma aluna, Rita, refere que aquela relação acontece com outros números para além do dez. O par Rita e Marco (IV) mostra na sua resolução uma compreensão relacional (R) da relação aritmética e um nível de generalização global (G), ao ser capaz de enunciar uma regra geral que não se apoia na descrição do contexto da situação (Figura 7.35).



A descoberta que eu fiz foi que quando se adiciona um número qualquer 1, 2, 3... e se subtrai o mesmo número dá-nos o resultado inicial.
(Por ex. 9 9+10=19 19-10=9

número inicial adiciona subtrai n.º inicial

Figura 7.35 – Resolução do par Rita e Marco (IV) da primeira parte da tarefa 30.

Outra aluna, Carolina, por sua vez, refere que a ordem pela qual as operações são realizadas pode ser invertida. Rita refere que essa troca na ordem das operações não resulta com todos os números naturais.

> Rita – Quero dizer uma coisa sobre o que o Miguel disse. Ele estava a dizer que quando se adicionava 10... Ele estava sempre a dizer que era só o 10, mas também dá com os outros números. (...) Mas se eu aí adicionar 20 e subtrair 20 também vai dar.
> Investigadora – Vai dar o número inicial.
> Carolina – E se nós primeiro subtrairmos 10, por exemplo, 43 menos 10 vai dar 33, e se depois somarmos mais 10, vai dar 43.
> Investigadora – O que é que tu estás a dizer, Carolina? Está a dizer que posso fazer o quê, aqui?
> Carolina – Trocar isso.
> Investigadora – Trocar. Em vez de fazer primeiro o adicionar, também é verdade, que se eu fizer primeiro o subtrair e depois o adicionar.
> Rita – Oh, professora, sim, também é verdade. Mas, por exemplo, no nosso escolhemos o nove, se nós fossemos primeiro subtrair 10 não dava.
> Investigadora – Sim.

Fábio – Dava menos um.
Investigadora – Tinhas de fazer o quê aí? De escolher um número qualquer?
Rita – Escolher mais do que 10 ou o 10.
Investigadora – Tinhas que escolher um número igual ou superior a 10 para primeiro subtrair 10.

Estas alunas, Carolina e Rita, em conjunto, mostram que reconheceram a relação aritmética para além dos casos particulares trabalhados, apresentando a sua extensão para outros números, ou seja, reconhecendo relacionalmente a relação (R).

Quando a investigadora questiona a turma sobre o porquê dessa relação acontecer, João V. refere que: "Isso acontece porque somámos e subtraímos o mesmo número", enunciando a regra sem descrever o contexto da situação e evidenciando um nível global de generalização (G). Nessa altura, a investigadora propõe a escrita da relação encontrada em linguagem matemática, de forma a poderem expressá-la para qualquer número. Inicialmente, Fábio enuncia a generalização da relação numérica em linguagem natural, referindo que "Escolhemos qualquer número e adicionamos qualquer número e depois subtraímos o número que adicionámos e vai dar-nos o número que escolhemos". Em seguida, este aluno sugere a seguinte representação simbólica da relação aritmética em discussão:

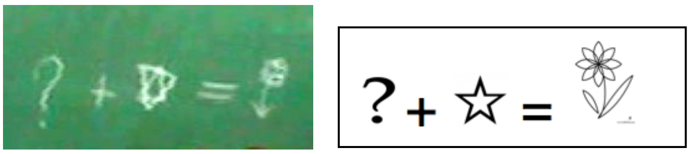


Figura 7.36 – Representação simbólica sugerida por Fábio na primeira parte da tarefa 30.

A partir da representação de Fábio (Figura 7.36), a investigadora conduz a discussão com o objetivo de levar os alunos a interpretarem os diferentes símbolos e a traduzir de forma adequada a relação aritmética que tinham enunciado em linguagem natural.

Investigadora – O ponto de interrogação representa o quê?
João V. – Um número qualquer.
Diogo – O dois.
Investigadora – Um número qualquer. Está a dizer o Diogo que é o dois. Não pode ser o três, Diogo?
Vários alunos (incluindo o Diogo) – Pode.
Investigadora – Pode ser 20?
Vários alunos – Pode.
Investigadora – Pode ser o 5843?
Vários alunos – Pode.

Fábio – Pode ser um número qualquer.
Investigadora – Pode ser um número qualquer? Este (apontando para a estrela)…
Fábio – Pode ser um número qualquer.
Investigadora – Igual a este? (apontando para a flor).
Rita – Sim.
Outros alunos – Não.
Investigadora – Este (apontando para a estrela) pode ser igual a este? (apontando para a flor).
Vários alunos – Não.

A investigadora questiona os alunos sobre a necessidade de usarem tantos símbolos diferentes e se a expressão escrita no quadro exprime a relação que haviam referido em linguagem natural. Propõe que leiam de novo o enunciado da tarefa de modo a reformular o que haviam escrito em linguagem matemática. Nesse momento, Fábio altera a sua representação (Figura 7.37), apresentando uma expressão simbólica que exprime corretamente a relação numérica explorada.

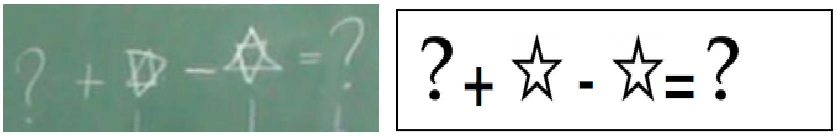


Figura 7.37 – Reformulação feita em coletivo da representação simbólica sugerida por Fábio, na primeira parte da tarefa 30.

Os símbolos são substituídos pela investigadora por diferentes valores numéricos, sugeridos pelos alunos, de forma a validar a igualdade. Nessa exploração, Matilde refere "É como se a estrela não existisse", enunciando, informalmente, que a adição e a subtração do mesmo número não alteram o valor inicial. O facto de referir-se à "estrela", em vez de a um valor numérico, (nomeando, assim, a indeterminação e operando com ela) elucida como esta aluna conseguiu apreender a relação num nível de generalização global (G).

Segunda parte da tarefa – Trabalho autónomo dos alunos

A forma como os diferentes grupos de alunos (I ao VII) percecionaram as relações numéricas da estratégia de cálculo na segunda questão da tarefa foi analisada de acordo com o nível de pensamento relacional, como mostra o Quadro 7.24.

Quadro 7.24 – Nível de pensamento relacional dos grupos de alunos na segunda parte da tarefa 30.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	Total
NR		x				x		2
EP								0
QV	x			x			x	3
R			x		x			2

Constata-se que, dos sete grupos, dois não reconheceram as relações numéricas a partir dos exemplos particulares (NR). Três grupos conseguiram usar esses exemplos particulares com sentido de quase-variáveis (QV) e dois reconheceram as relações numéricas envolvidas na situação (R).

Relativamente ao nível de generalização da relação aritmética (Quadro 7.25), verifica-se que, dos sete grupos, dois não conseguiram detetar a comunalidade entre os casos, não produzindo qualquer tentativa de generalização (NG). Três grupos apresentaram uma generalização algébrica contextual (C), identificando a comunalidade e nomeando a indeterminação, mas envolvendo a descrição do contexto da situação. Dois grupos conseguiram um nível de generalização global, onde nomeiam a indeterminação não usando a descrição do contexto da situação (G).

Quadro 7.25 – Nível de generalização dos grupos de alunos na segunda parte da tarefa 30.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	Total
NG		x				x		2
A								0
F								0
C	x			x			x	3
G			x		x			2

Cruzando o nível de pensamento relacional com o nível de generalização (Quadro 7.26), constata-se que, naturalmente, os dois grupos que não apreenderam a estrutura relacional da regularidade numérica (NR), não evidenciaram qualquer nível de generalização (NG). Os três pares que conseguiram reconhecer a relação numérica usando os exemplos apresentados com sentido de quase-variável (QV) conseguiram enunciar uma regra geral envolvendo o contexto da situação, expressando uma generalização de nível contextual (C). Somente os dois pares que reconheceram relacionalmente a regularidade numérica (R) atingiram um nível de generalização algébrica, neste caso, de tipo global (G).

Quadro 7.26 – Relação entre o nível de pensamento relacional e o nível de generalização dos grupos de alunos na segunda parte da tarefa 30.

		Nível de generalização				
		NG	A	F	C	G
Nível de pensamento relacional	NR	2				
	EP					
	QV				3	
	R					2

No que respeita aos tipos de representação da relação aritmética (Quadro 7.27), são considerados apenas cinco dos sete grupos, tendo em conta que os restantes dois (II e VI) não percecionaram uma relação aritmética (NR) e, evidentemente, também não expressaram ou representaram qualquer nível de generalização (NG). Constata-se que os cinco grupos considerados usaram apenas uma forma de representação. Dois utilizaram a linguagem natural (LN) e três uma forma simbólica, idiossincrática (I), para representar a generalização da relação.

Quadro 7.27 – Tipo de representação usado pelos grupos de alunos na segunda parte da tarefa 30.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	Total
LN			x		x			2
N								0
D								0
Dg/E								0
T								0
S								0
I	x			x			x	3
A								0
Total	1	-	1	1	1	-	1	

Discussão coletiva

O par Matilde e André (VII) vai explicar à turma a sua forma de resolução (Figura 7.38), revelando a utilização do sentido de quase-variável a partir dos exemplos dados (QV) e um nível de generalização onde a indeterminação é nomeada, mas ainda envolve a descrição do contexto da situação (C). Este par representa também simbolicamente a relação, de uma forma idiossincrática, usando diversos símbolos próprios. Embora a introdução de diversos símbolos possa parecer supérflua para a explicação da relação aritmética presente, evidencia que o seu uso é feito com intencionalidade. Este par evidencia ter percebido os procedimentos realizados sequencialmente e consegue traduzi-los de uma forma geral. Matilde explica pormenorizadamente a resolução do par.

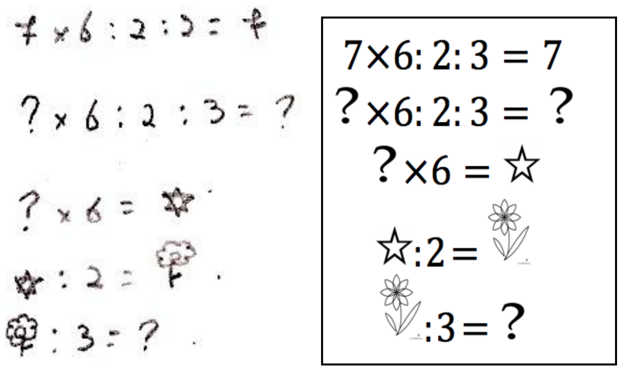


Figura 7.38 – Resolução do par Matilde e André (VII) da segunda parte da tarefa 30.

> Matilde – Então, o ponto de interrogação pode ser um número qualquer. E a estrela e a flor também. Então, ponto de interrogação vezes seis, que é um número qualquer vezes seis, vai dar esse número vezes seis. E depois o resultado a dividir por dois é como se desse flor que é um número qualquer. E depois a flor a dividir por três, dá o ponto de interrogação.

Embora a representação e explicação deste par estejam corretas, centram-se ainda nos procedimentos efetuados e não revelam explicitamente a relação entre a multiplicação por seis e posterior divisão por dois e três. Esta última questão é colocada por Rita que interpela a colega sobre a utilização dos números seis, dois e três na representação simbólica.

> Rita – Mas ali tu meteste vezes seis, a dividir por dois e a dividir por três. (...) Para qualquer número puseste um ponto de interrogação, uma estrela e uma flor. Mas depois puseste a multiplicar por seis e a dividir por dois e por três, então quer dizer que não podemos pôr qualquer número.
> Investigadora – Então, e podemos?
> Alunos – Podemos.
> Investigadora – Podemos o quê?
> Rita – Podemos pôr com outros números, por exemplo, podemos pôr vezes sete.
> Matilde – Mas assim tínhamos de mudar isto, porque assim não dava o mesmo.
> Rita – Depois púnhamos o sete a dividir por três e a dividir por quatro.

Rita começa a reconhecer a relação entre os números usados, procurando aplicá-la para além do caso apresentado, embora usando, incorretamente, uma adição (7=3+4). Nesta altura a investigadora questiona os alunos sobre essa relação e Gonçalo é o primeiro a revelá-la.

Gonçalo – A professora está agora a falar da relação que existe aí. Eu sei qual é. Aqueles dois que pede para dividir é o três e o dois.
Investigadora – Sim, pede para dividir por dois e por três.
Gonçalo – Se multiplicarmos esses dois números vai dar o seis.

Gonçalo refere ainda que essa relação continua a ser verdadeira usando outros números. Fábio mostra alguns exemplos válidos, ajudando outros alunos, como João V., a perceber a relação. Nesse momento, Fábio estabelece a conexão com a tarefa anterior, enunciando a utilização das operações inversas.

Fábio – Ali, por exemplo, ... podíamos pôr em vez do seis, podia ser o oito, mas depois ali podíamos pôr o quatro e depois o dois, ou então o dois primeiro e depois o quatro em baixo. Porque quatro vezes dois é oito.
Investigadora – Mais, outro exemplo.
João V. – Então, é essa a relação.
Fábio – Aqueles dois números têm sempre que dar aquela multiplicação.
Investigadora – Então, aqueles dois números...
Vários alunos – Multiplicados.
Fábio – Têm que dar aquele número.
Investigadora – Porquê?
Fábio – É como se fosse o 10 mais 10. Aqueles dois números é como se fosse o 10 e o seis é como se fosse o 10.
Investigadora – Sim, é como se fosse adicionar e subtrair 10. E aqui é o quê? É adição e subtração?
Vários alunos – Não. É multiplicação e divisão.
Fábio – É o contrário.
(...)
Investigadora – Então, multiplicar por seis é o contrário de...
Rita – Dividir por seis.
Investigadora – Ou dividir por dois...
Rita – E por três.
Investigadora – E se eu fizesse aqui um número qualquer a multiplicar por 10?
Fábio – Ali tínhamos que pôr o dois. E depois o cinco. Ou o cinco primeiro e depois o dois. (...) Cinco vezes dois, 10.
Investigadora – Porque multiplicar por 10 é o contrário de dividir por dois e dividir por cinco.
Fábio – Ou então, por cinco e por dois.
Investigadora – Outro exemplo.
Fábio – Oito. Dois e quatro.
Investigadora – Se eu multiplicar por oito, a seguir dividir por dois e por quatro, vou obter o mesmo número.
Rita – Também pode ser nove, a dividir por três e por três.
Investigadora – E se eu multiplicar por 16?
Fábio – Temos que fazer por quatro e por quatro.
Investigadora – E se for por oito e por dois?
Vários alunos – dá.
(...)
Diogo – Porque dividir é o contrário de multiplicar.

Fábio apresenta o exemplo que tinha indicado na sua ficha de trabalho (Figura 7.39), mostrando a utilização da relação numérica com "números maiores" e explicitando a relação entre a multiplicação dos divisores dois e quatro e o oito. Este aluno consegue, assim, estender as relações exploradas aplicando-as a números maiores.

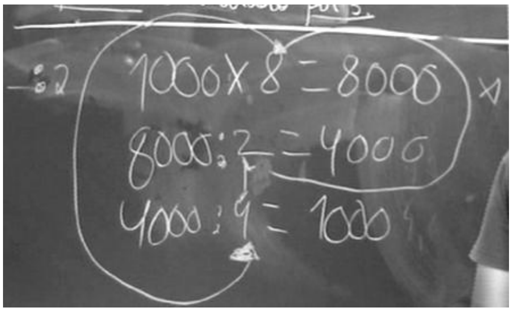


Figura 7.39 – Exemplo apresentado por Fábio na segunda parte da tarefa 30.

7.3.2 Tarefa 32 – "Explorando calendários e tabelas"

Esta tarefa (Anexo 3) explorava regularidades numéricas em calendários e tabelas. A análise aqui apresentada foca-se na segunda questão desta tarefa que abordava as relações numéricas numa tabela de números até cem (Figura 7.40). Partindo da disposição dos números em linhas e colunas, a regularidade numérica relacionava os números dispostos em cruz e a igualdade da soma dos elementos na linha e na coluna. Pretendia-se que os alunos reconhecessem essas relações numéricas e as enunciassem de forma geral. Mais concretamente, a análise apresentada centra-se na última questão (Questão 2.3) que solicitava aos alunos que verificassem se a regularidade numérica se mantinha colocando um número particular como elemento central da cruz.

Após a apresentação da tarefa, os alunos resolveram-na autonomamente (em seis pares e dois trios) e, em seguida, realizou-se o momento de discussão coletiva. A análise aqui apresentada foca-se primeiramente nas resoluções autónomas dos pares e, em seguida, no momento de discussão coletiva.

Tarefa "Explorando calendários e tabelas"

2. Os números na tabela...

2.1. Observa a seguinte tabela e os números que estão destacados.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	**55**	56	57	58	59	60
61	62	63	**64**	**65**	**66**	67	68	69	70
71	72	73	74	**75**	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2.1. O Pedro diz que se adicionar os números em linha obtém o mesmo valor que na adição dos números em coluna. Verifica se o Pedro tem razão.

2.2. Consegues encontrar outros números com a mesma disposição na tabela onde isso aconteça? Mostra as tuas descobertas.

2.3. Será que a mesma relação se verifica quando o número que está no centro é 823? Explica porquê.

Figura 7.40 – Enunciado da tarefa 32 "Explorando calendários e tabelas".

Trabalho autónomo dos alunos

A forma como os diferentes grupos de alunos (I ao VIII) reconheceram as relações numéricas foi analisada de acordo com o nível de pensamento relacional, utilizando as categorias referidas anteriormente. Pela leitura do Quadro 7.28 verifica-se que seis grupos reconheceram as relações numéricas nos exemplos particulares (EP). Dois pares reconheceram a relação através de casos particulares, mas usando o sentido quase-variável (QV).

Quadro 7.28 – Nível de pensamento relacional dos grupos de alunos na tarefa 32.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total
NR									0
EP	x			x	x	x	x	x	6
QV		x	x						2
R									0

Constata-se que relativamente ao nível de generalização (Quadro 7.29), seis grupos apresentam uma generalização aritmética, detetando a comunalidade entre os casos apresentados, mas sem extensão a outros casos. Dois pares conseguiram enunciar uma generalização de nível algébrico, não nomeando a indeterminação, evidenciando um nível de generalização de nível factual (F).

Quadro 7.29 – Nível de generalização dos grupos de alunos na tarefa 32.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total
NG									0
A	x			x	x	x	x	x	6
F		x	x						2
C									0
G									0

Consequentemente, cruzando o nível de pensamento relacional com o nível de generalização (Quadro 7.30), verifica-se que os seis pares que apenas reconheceram a relação nos casos apresentados (EP) enunciaram uma generalização de nível aritmético (A), não enunciando uma regra geral. Os dois grupos que evidenciaram um nível de generalização algébrico, embora de nível factual (F), não nomeando a indeterminação, reconheceram as relações numéricas através do sentido quase-variável (QV).

Quadro 7.30 – Relação entre o nível de pensamento relacional e o nível de generalização dos grupos de alunos da tarefa 32.

		Nível de generalização				
		NG	A	F	C	G
Nível de pensamento relacional	NR					
	EP		6			
	QV			2		
	R					

No que respeita aos tipos de representação da relação aritmética (Quadro 7.31), quatro pares utilizaram a linguagem natural (LN) e quatro pares recorreram a um diagrama ou esquema (Dg/E). Um dos pares (VII) utilizou os dois tipos de representação em simultâneo. Apenas um par (II) expressou a relação utilizando uma expressão numérica (N).

Quadro 7.31 – Tipo de representação usado pelos grupos de alunos na tarefa 32.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total
LN	x			x		x	x		4
N		x							1
D									0
Dg/E			x		x		x	x	4
T									0
S									0
I									0
A									0
Total	1	1	1	1	1	1	2	1	

Discussão coletiva

A discussão coletiva focou-se essencialmente na questão que solicitava aos alunos para verificar se a relação enunciada se mantinha colocando um número particular, 823, como número central. João V., Lawry e Marco (VIII) foram os primeiros alunos a apresentar a sua forma de resolução à turma (Figura 7.41). Este grupo relacionou os diferentes números com a posição que ocupavam na tabela, reconhecendo as relações na linha e as relações na coluna. No entanto, por não considerarem a relação linha-coluna, estes alunos apenas apreenderam uma comunalidade que os conduziu a uma generalização aritmética (A), não permitindo a elaboração de uma regra geral da relação. O seu nível de pensamento relacional foi ainda considerado como dependente dos exemplos particulares (EP).

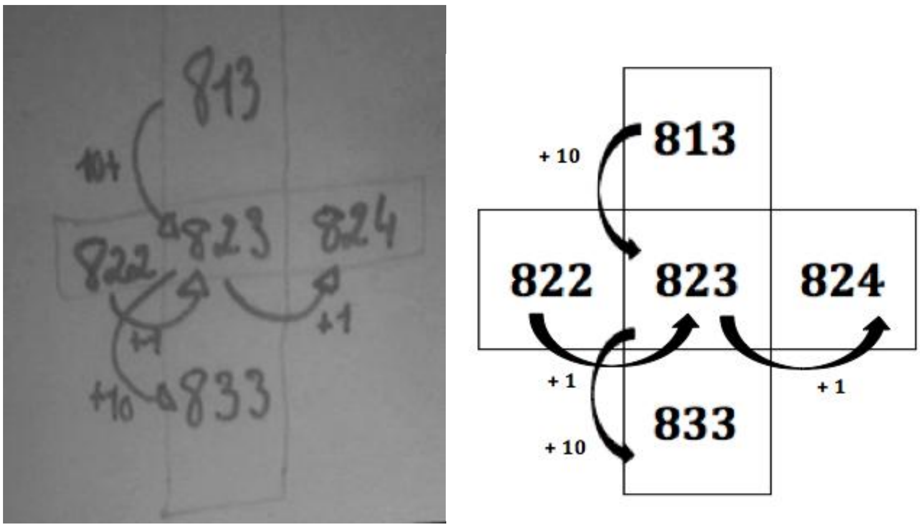


Figura 7.41 – Resolução do grupo João V., Lawry e Marco (VIII) da tarefa 32.

Ao explicar a sua resolução, João V. foi questionado pelos colegas sobre o que significava a ordem em que os diferentes elementos estavam posicionados, conforme referiram na sua resolução. Essa questão permitiu a exploração da leitura da tabela por linhas e por colunas, identificando as regularidades numéricas que aí se encontravam.

> João V. – 822 tem a relação de mais um com o 823 e assim sucessivamente com o 823 e o 824. Depois também vimos que o 813 tem uma relação de 10 com o 823, e o 823 com uma relação de 10 com o 833. E nós escrevemos que "isto acontece porque os números têm uma relação de 10 e de um e também tem a ver com a ordem que eles estão posicionados" (lendo a folha de resposta).
> Rita – O que é que vocês querem dizer quando dizem que também tem a ver com a ordem que eles estão posicionados?
> João V. – Pois, porque eles estão posicionados com ordem normal, mas se estivesse dois, cinco, números ao calhas, não era a mesma coisa.
> Investigadora – Podes usar a tabela que está aqui para explicar isso melhor? Para explicares o que queres dizer com isso da forma como eles estão posicionados.
> João V. – Por exemplo, aqui o um, está um, dois, três. Por exemplo, se estivesse três, quatro, um, dois, não era a mesma coisa como a ordem que está. Não era a mesma ordem e não era a mesma coisa.
> Investigadora – Como é que eles estão posicionados? Vocês disseram aí. Eles estão posicionados dessa forma e havendo uma relação de quanto nos números?
> João V. – De 10 e de um. Estes assim (apontando para a primeira linha) estão posicionados de um em um.
> Investigadora – Quando nós estamos na mesma linha... Quando vamos para a frente ou para a direita o que é que acontece?
> João V. – Acrescenta-se mais um. E aqui (apontando para as diferentes colunas, no sentido descendente) é sempre mais dez.
> Matilde – Isso também nós dissemos aqui no nosso. Como acontece na tabela anterior, as colunas vão de 10 em 10 e as linhas vão de um em um.

Em seguida, o par do Fábio e do António (III) apresenta à turma a sua resolução (Figura 7.42). Este par usa o modelo de balança para explicar as relações entre os números que formam uma cruz na tabela. Como estabelece uma relação entre coluna-linha, ou seja, perceciona a relação que permite enunciar a igualdade, usando números particulares, o nível de pensamento foi categorizado como quase-variável (QV) e o nível de generalização como factual (F), por não nomear a indeterminação.

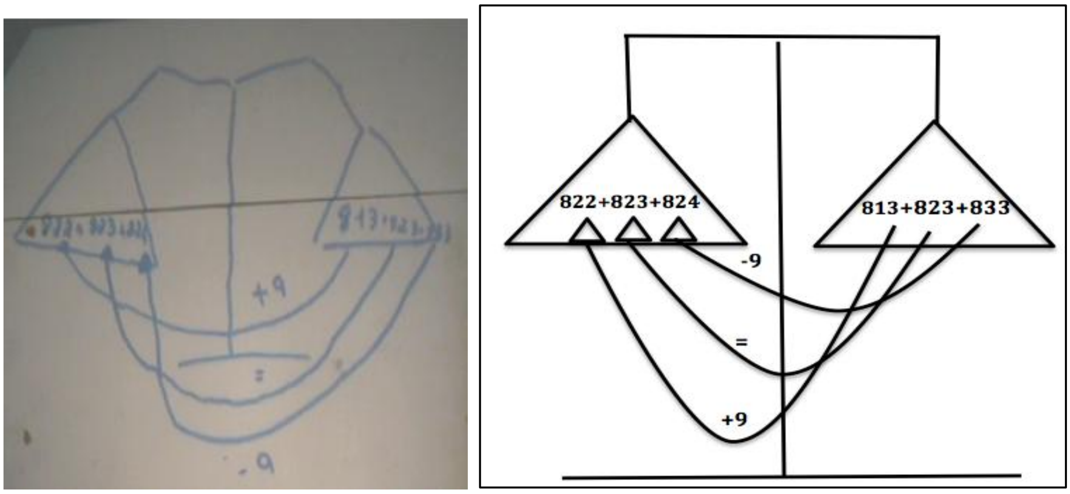


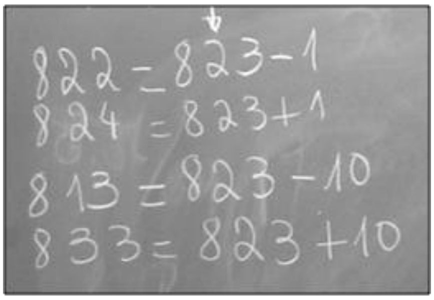
Figura 7.42 – Resolução do par Fábio e António (III) da tarefa 32.

Este par explica a sua resolução afirmando não terem feito “contas”, ou seja, não adicionaram os números presentes em cruz, e referindo terem relacionado cada uma das parcelas do lado esquerdo da igualdade com as parcelas do lado direito da igualdade representada na balança. Fábio explicita a observação da relação explorada na tarefa 30, para justificar a igualdade que o par identificou.

> Fábio – Nós fizemos isto (apontando para a balança) porque a professora Célia disse para fazer sem contas, então, nós fomos ver à balança e vimos que do 813 para o 822 era mais nove, o 823 era igual ao 823 e depois o 833 menos nove ia dar o 824. Era como na outra tarefa, estávamos a adicionar e a subtrair como se não tivéssemos a mexer no número.
> Investigadora – Então, porque é que a balança está em equilíbrio? Porque é que um lado da balança é igual a outro lado da balança?
> Fábio – Porque tem o mesmo valor.
> Investigadora – E o que é que a gente sabe sem fazer contas?
> Fábio – Então, fizemos a diferença, num era mais nove e depois tirámos outra vez esse nove.

Quando este par é questionado por Rita sobre o porquê de terem utilizado as setas na sua representação, referem que “É para saber a diferença. Como ali é igual no mais e no menos, é como se não estivéssemos a mexer no número”. Desta forma, este par usa um diagrama com setas, em simultâneo com o modelo de balança, para tornar mais explícita a relação entre os diferentes elementos da igualdade. De facto, não precisando de efetuar procedimentos de cálculo, estes alunos identificam as relações numéricas que permitem justificar a igualdade numérica em causa nesta situação.

O par Carolina e Daniel (II) usa outra forma de representação da relação entre os números da tabela, registando-a através de expressões numéricas (N). Inicialmente, apresentam a relação individual de cada um dos números com esse número central (Figura 7.43), mostrando as relações numéricas de mais e menos um e de mais e menos dez, correspondentes à leitura das relações na linha e na coluna, respetivamente.



$$822 = 823 - 1$$
$$824 = 823 + 1$$
$$813 = 823 - 10$$
$$833 = 823 + 10$$

Figura 7.43 – Primeira parte da resolução do par Carolina e Daniel (II) da tarefa 32.

Em seguida, expressam a igualdade usando essas relações (Figura 7.44). Esta forma de resolução evidencia como os alunos reconheceram as relações numéricas no caso particular apresentando, usando-o com sentido de quase-variável (QV). A forma como expressaram a generalização da relação foi categorizada como factual (F) por ainda se centrar nos casos particulares e não nomear a indeterminação.

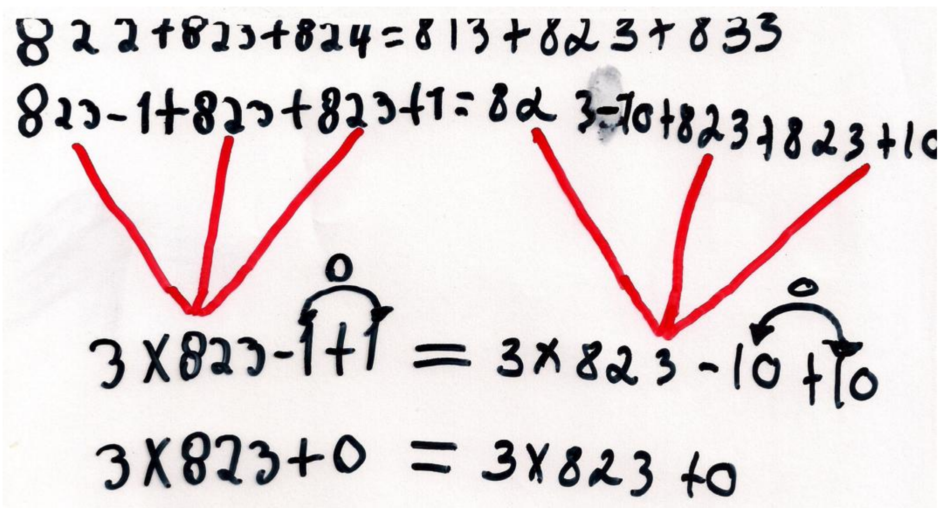


Figura 7.44 – Resolução do par Carolina e Daniel (II) da tarefa 32.

A explicação de Carolina sobre a sua forma de resolução não foi imediatamente compreendida por todos os colegas. Por sugestão da investigadora, a aluna escreve o procedimento no quadro, e, em simultâneo, explica aos colegas (com algum apoio da investigadora) cada um dos passos desse procedimento. Inicialmente, Carolina, começa por referir como relacionou cada um dos números com o número central, 823 (Figura 7.43). A investigadora salienta que a forma de resolução deste par está relacionada com as descobertas que os outros pares já haviam feito, sendo apenas outra forma de escrever a igualdade e que pode ajudar a compreender por que motivo as somas dos números em linha e em coluna são iguais. O excerto seguinte mostra um momento em que alguns alunos começam a compreender a forma de resolução do par Carolina e Daniel.

> Investigadora – O que o Pedro nos mandava fazer era adicionar. Então, eu vou continuar a adicionar. Eu vou adicionar o 823. Nesse eu não vou mexer. Porquê?
> Carolina – Porque é igual.
> Investigadora – E agora eu quero escrever o 824.
> Fábio – 823 mais 1.
> Investigadora – Então, o 813, e eu já estou na coluna, eu quero escrevê-lo em relação ao 823. Então, 813 é igual a...
> Alunos – 823 menos 10.
> João V. – Isso foi o que nós descobrimos, as relações.
> Investigadora – Exatamente, eles estão a escrever todas as relações que vocês descobriram. Todos os pares descobriram as relações. Agora, eles estão a usar outra forma de as escreverem. E vamos lá ver se esta forma nos ajuda a perceber porque é que os dois lados da balança são iguais... 823 menos 10. E agora o que é que eu tenho de escrever mais?
> (...)
> João V. – É como ali em cima, só que ali é 10 e aqui é um.
> Investigadora – Exatamente, eu estou sempre a escrever estes números em relação a 823. E a relação que eles têm com o 823, como vocês disseram e muito bem, é uma relação de menos um, mais um, menos 10 e mais 10.

Também a parte final da igualdade na resolução do par Carolina e Daniel é explicada pormenorizadamente à turma. Nessa altura é salientado a importância do número central por este relacionar-se com todos os outros.

> Fábio – Mas depois, eles, aí em baixo, fizeram três vezes 823.
> Investigadora – Porque é que eu estou a escrever sempre com o 823?
> Fábio – Porque é um número fundamental.
> Investigadora – Porque é o número do meio e eu estou a tentar relacionar todos os números com ele.
> Matilde – Sim, é o mesmo que três vezes 823.
> Rita – Pois, professora, mas aquilo não é o 823.
> Fábio – Pois não, é o 823 menos um.
> Matilde – Depois no fim está mais um.
> Investigadora – Então, escrevam lá o resto. Percebem que há ali três vezes 823? Estamos a adicionar 823 três vezes... E agora, a gente não se esquece que está lá menos um e mais um. E menos um e mais um, o que é que vamos fazer?

Alguns alunos – É igual a zero.

Tomando como ponto de partida esta forma de resolução, a investigadora propõe à turma a escrita desta relação em linguagem matemática. Inicialmente, alguns alunos propõem a utilização do ponto de interrogação para representar “qualquer número”. A escrita da relação na representação em cruz usando o ponto de interrogação foi fácil e rapidamente conseguida por alguns alunos.

> Investigadora – Ok, então eu agora vou-vos propor um desafio diferente. Vamos imaginar a mesma situação com uma cruz daquele modo, só que em vez de ter aqui 823 ou 1580 ou 249, não interessa, se eu tiver aqui um número qualquer...
> Vários alunos – Ponto de interrogação.
> Investigadora – Se eu colocar um ponto de interrogação eu já sei que vai representar um número qualquer.
> Matilde – Já sei. Depois vai ter ao lado, ponto de interrogação mais um.
> Rita (e outros) – E do outro ponto de interrogação menos um.
> Fábio (e outros) – Lá em cima, ponto de interrogação menos 10 e em baixo mais 10. Facílimo!

À medida que os alunos vão referindo os valores, a investigadora vai completando o esquema. A representação final, construída em coletivo, apresenta-se na figura 7.45.

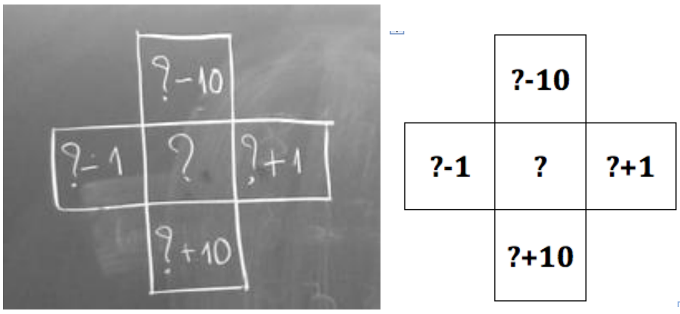


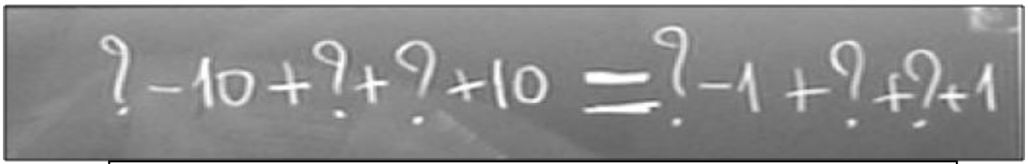
Figura 7.45 – Representação simbólica elaborada no coletivo da turma na tarefa 32.

Em seguida, a investigadora continua a exploração da relação apresentada pela tarefa. Desta forma, constrói, em coletivo com a turma, a igualdade usando o modelo já apresentado pelo par de Carolina e Daniel, mas representando-o para “um número qualquer”.

> Investigadora – Então, se eu tiver ali o ponto de interrogação que é um número qualquer, desde que os números que estejam antes, depois, em cima e em baixo, obedeçam a estas condições... Então, se eu tiver esta situação, eu sei o quê? O que é que me diz o Pedro?
> Matilde – Que é um número qualquer.

Investigadora – Então, vamos pensar no que é que o Pedro me disse.
Fábio – Se adicionar a linha e a coluna são iguais.
Investigadora – Se eu adicionar estes números da coluna...
Miguel – Obtenho o mesmo número da linha.

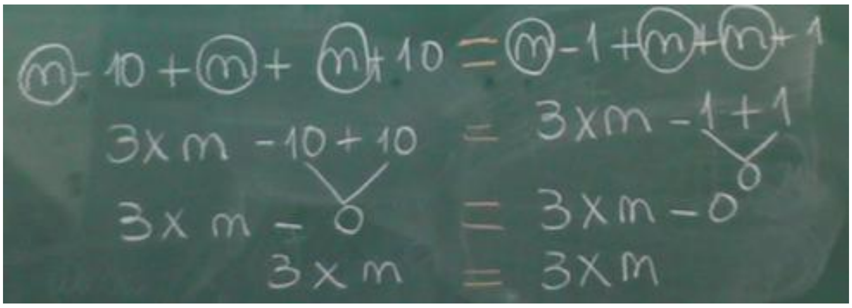
A investigadora vai escrevendo no quadro, à medida que alguns alunos vão referindo os procedimentos seguintes (Figura 7.46). Perante esta expressão simbólica da relação numérica, Fábio refere: “Assim já se percebe melhor... já parece que não estamos a adicionar nada”.



$$? -10 + ? + ? + 10 = ? -1 + ? + ? + 1$$

Figura 7.46 – Exploração coletiva da igualdade numérica da tarefa 32.

Nesta altura, a investigadora sugere ainda que em vez do ponto de interrogação, usem outro símbolo, por este ser bastante usado noutros contextos, e que poderiam já usar outra forma de representação. Vários alunos sugerem outros símbolos, como a estrela e a flor já utilizados noutras tarefas, mas a investigadora propõe a utilização do símbolo n para representar “qualquer número”, e os alunos não manifestam relutância em aceitá-lo. Fábio evidencia compreender a naturalidade desta opção ao referir “n de número, é um número qualquer”. Em seguida, a investigadora continua a escrita da igualdade e alguns alunos vão indicando os procedimentos (Figura 7.47). Carolina refere então: “Oh, professora, isso foi o que nós fizemos, mas só que aquele número foi o que o Pedro mandou e agora é com um número qualquer”. A aluna manifesta assim compreender como a relação que identificaram pode ser aplicada a um número qualquer.



$$
\begin{aligned}
n - 10 + n + n + 10 &= n - 1 + n + n + 1\\
3\times n - 10 + 10 &= 3\times n - 1 + 1\\
3\times n - 0 &= 3\times n + 0\\
3\times n &= 3\times n
\end{aligned}
$$

Figura 7.47 – Representação final da igualdade numérica elaborada no coletivo na tarefa 32 .

No momento final da aula, quando a investigadora questiona os alunos no sentido de perceber se tinham compreendido o que havia sido feito, Fábio refere ainda que esta igualdade continuaria válida usando outros valores. Este aluno mostra compreender a relação trabalhada, generalizando-a para outros casos, mantendo as condições que a tornam verdadeira, independentemente dos números usados.

Investigadora – Que *n* é este? No nosso caso era...
Vários alunos – O 823.
Investigadora – E o que é que me está a mostrar ali? Que eu vou ter aqui quantas vezes o 823?
Vários alunos – Três.
Fábio – Ali, em vez de 822, podíamos ter 821 e depois 823 e depois 825.
Investigadora – E continuavas a ter a mesma relação?
Fábio – Sim, era mais dois.
Investigadora – E depois?
Fábio – E ali fazia [uma diferença de] 20. 803 e 843.

Fábio enuncia assim uma outra igualdade: $821 + 823 + 825 = 803 + 823 + 843$. Usando a relação trabalhada na tarefa, este aluno consegue criar outra igualdade obedecendo a uma diferença entre os valores que já não é de um em um na linha ou de dez em dez na coluna, mas de dois na linha e de vinte na coluna.

7.3.3 Síntese

As tarefas da quarta sequência apresentadas exploravam regularidades numéricas, enquadrando-se num contexto de promoção do pensamento relacional. Tinham como objetivo principal o reconhecimento das relações numéricas e a sua generalização para além dos casos particulares apresentados.

Na análise desta sequência de tarefas considerou-se que a primeira tarefa – "Pensa num número" – era constituída por duas partes e que a segunda – "Explorando calendários e tabelas" – era constituída por uma parte.

Relativamente ao nível de pensamento relacional verifica-se que, de um modo geral, os alunos evidenciam um menor nível de sofisticação na identificação de relações numéricas nas tarefas analisadas desta sequência comparativamente com o nível que apresentaram na sequência anterior. Assim, na primeira parte da primeira tarefa, apenas dois grupos de alunos conseguiram reconhecer a relação numérica apresentada de forma geral, enquanto quatro grupos a reconheceram nos exemplos particulares apresentados e um grupo percecionou essas relações com sentido de quase-variável. Na segunda parte da primeira tarefa dois grupos não conseguiram reconhecer a relação numérica e apenas dois a reconheceram de forma geral, independentemente dos exemplos particulares. Este facto registou-se ainda na segunda tarefa onde todos os grupos se centraram nos casos particulares e apenas dois os usaram com sentido de quase-variável. De facto, nesta sequência de tarefas, foi menor o número de alunos que exprimiu relacionalmente as regularidades numéricas apresentadas, comparativamente com a sequência anterior.

Relativamente ao nível de generalização, também se evidenciou, de forma geral, uma menor sofisticação em relação ao apresentado na sequência anterior. Na primeira parte da primeira tarefa apenas dois grupos apresentaram um nível global de generalização. Na segunda parte dessa tarefa exatamente o mesmo número de grupos atingiu esse nível de generalização. Enquanto na primeira parte da tarefa quatro grupos evidenciaram um nível de generalização aritmética e um grupo apresentou um nível de generalização factual, na segunda parte houve dois grupos que não reconheceram qualquer relação aritmética. Nessa parte da tarefa três grupos conseguiram evidenciar um nível contextual de generalização. Na segunda tarefa nenhum dos grupos de alunos conseguiu nomear explicitamente a indeterminação. Apenas dois grupos expressaram uma generalização algébrica, de nível factual, e os restantes seis grupos expressaram uma generalização de nível aritmético, reconhecendo a relação nos casos apresentados, mas não a estendendo para casos indeterminados. De facto, nesta sequência de tarefas, os alunos evidenciaram níveis mais baixos de generalização.

Cruzando o nível de pensamento relacional com o nível de generalização constata-se que, naturalmente, a reduzida perceção da relação de forma geral implicou níveis de generalização de abrangência inferior. Assim, na primeira tarefa, em ambas as partes, apenas dois grupos de alunos reconheceram relacionalmente a situação aritmética e a expressaram de forma global. Na segunda tarefa todos os grupos reconheceram a relação numérica apenas nos casos particulares, não enunciando uma regra geral, embora dois tenham conseguido um nível de generalização factual por usarem esses casos particulares com sentido de quase-variável.

Relativamente ao tipo de representação, na primeira parte da primeira tarefa todos os grupos de alunos usaram a linguagem natural para expressar a relação aritmética. Na segunda parte dessa tarefa, apenas dois grupos (dos cinco considerados) expressaram a relação em linguagem natural, e, curiosamente, os restantes três grupos usaram uma linguagem simbólica idiossincrática como forma de representação. Na segunda tarefa, para além da linguagem natural, surgiu em simultâneo o diagrama com setas para representar a relação.

Tendo em conta estes dados, importa atender às características das tarefas exploradas. Estas tarefas caraterizam-se por apresentarem contextos marcadamente numéricos, centrados em casos particulares, com relações numéricas mais complexas, que parecem ter dificultado a procura das relações de forma geral e, consequentemente, a nomeação explicita da indeterminação e a expressão da generalização.

No que concerne à exploração das tarefas em sala de aula e, mais concretamente, aos momentos de discussão coletiva apresentados, constata-se que, ambas as tarefas permitiram a identificação de propriedades das operações e da utilização das operações inversas. Por outro lado, na exploração coletiva de diferentes representações destaca-se a utilização, por alguns grupos de alunos, de representações simbólicas idiossincráticas. A discussão desse tipo de representações promoveu um maior aprofundamento das próprias relações aritméticas exploradas, contribuindo assim para uma melhor compreensão das mesmas.

7.4 A exploração de relações funcionais – Sequência V

Na análise da sequência V são apresentadas três tarefas – “Colares I”, “Colares II” e “Cubos com autocolantes” – trigésima oitava, quadragésima e quadragésima primeira tarefas da experiência de ensino, respetivamente.

7.4.1 Tarefa 38 – “Os colares I”

A tarefa apresentava uma sequência pictórica crescente (enunciado completo no Anexo 3), introduzida a partir do contexto apresentado na Figura 7.48. Explorava a relação entre o número de contas vermelhas (que correspondia ao número do colar) e o número de contas azuis na sequência de colares, procurando que os alunos determinassem uma regra para essa relação.

Após a apresentação da tarefa, os alunos resolveram-na autonomamente (em nove pares) e, em seguida, realizou-se o momento de discussão coletiva. A análise aqui apresentada foca-se primeiramente nas resoluções autónomas dos pares, categorizando o nível de pensamento funcional, o nível de generalização e o tipo de representações usadas pelos alunos. Em seguida, apresenta-se a análise centrada no momento discussão coletiva.

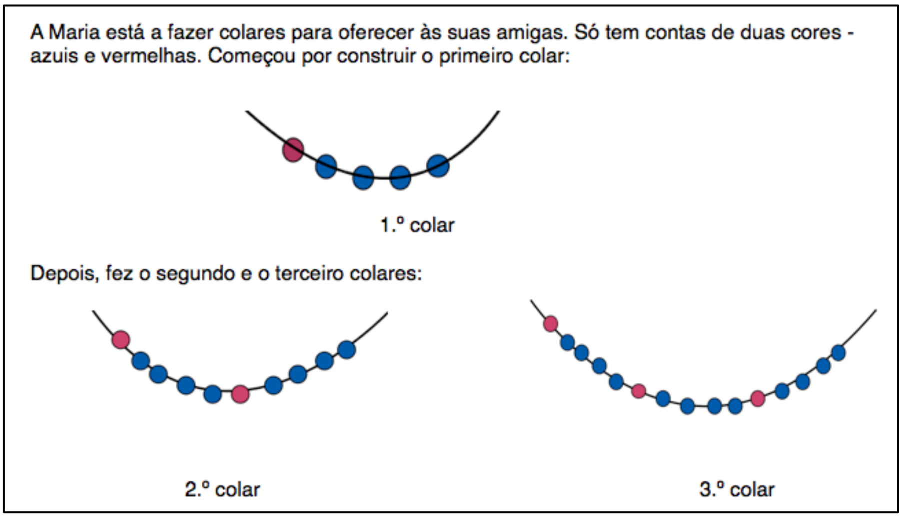


Figura 7.48 – Contexto da tarefa 38 “Os colares I”.

Trabalho autónomo dos alunos

A forma como os diferentes pares de alunos (I ao IX) percecionaram a relação entre as variáveis foi analisada quanto ao nível de pensamento funcional, de acordo com as categorias indicadas na secção da metodologia: 1) não relacional (NR), 2) relação recursiva (RR), e 3) relação funcional (RF). O Quadro 7.32 mostra o nível de pensamento funcional dos alunos nesta tarefa.

Quadro 7.32 – Nível de pensamento funcional dos pares de alunos na tarefa 38.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Total
NR					x					1
RR		x								1
RF	x		x	x		x	x	x	x	7

Constata-se que, dos nove pares, sete conseguiram reconhecer uma relação direta entre a variável dependente e a variável independente (RF). Um par não conseguiu reconhecer uma relação entre as variáveis (NR) e outro percecionou a relação entre as variáveis de forma recursiva (RR).

Quadro 7.33 – Nível de generalização dos pares de alunos na tarefa 38.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Total
NG										0
A					x					1
F	x	x							x	3
C										0
G			x	x		x	x	x		5

Relativamente ao nível de generalização da relação expressa na sequência dos colares (Quadro 7.33), constata-se que cinco dos pares conseguiram generalizar algebricamente de forma global (G), nomeando a indeterminação sem se apoiarem na descrição do contexto da situação. Estes pares também conseguiram expressar uma regra geral da relação. Três pares exibiram também um nível de generalização algébrica, mas de complexidade inferior, uma vez que não nomearam a indeterminação e generalizaram a relação a partir dos casos conhecidos, entendidos com sentido de quase-variável. Estes quatro pares evidenciaram assim um nível de generalização factual (F). Um dos pares apenas apreendeu a comunalidade entre os casos, expressando uma generalização de nível aritmético (A).

Quadro 7.34 – Relação entre o nível de pensamento funcional e o nível de generalização dos pares de alunos na tarefa 38.

		Nível de generalização				
		NG	A	F	C	G
Nível de pensamento funcional	NR		1			
	RR			1		
	RF			2		5

Analisando a relação entre o nível de pensamento funcional e o nível de generalização (Quadro 7.34) constata-se que a maior parte dos pares que reconheceu a relação funcional também evidenciou um nível de generalização global, indo para além dos casos concretos e não se centrando na descrição do contexto da situação. Apenas dois dos pares que reconheceram a relação funcional expressaram a generalização a partir dos casos particulares, não nomeando a indeterminação (F). Também o par que apenas reconheceu uma relação recursiva entre as variáveis atingiu esse nível de generalização. O par que não reconheceu uma relação entre as variáveis evidenciou um nível de generalização aritmética (A).

O Quadro 7.35 sistematiza os tipos de representação dos diferentes pares na expressão da generalização da relação.

Quadro 7.35 – Tipo de representação usado pelos pares de alunos na tarefa 38.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Total
LN	x	x		x	x	x		x		6
N		x								1
D		x								1
Dg/E										0
T	x							x	x	3
S				x			x			2
I										0
A			x			x				2
Total	2	3	1	2	1	2	1	2	1	

Verifica-se que, dos nove pares, seis usaram a linguagem natural (LN) para expressar a relação entre as variáveis. Desses seis pares, apenas um usou exclusivamente essa forma de representação e os restantes complementaram-na com outra representação. A forma de representação mais utilizada, para além da linguagem natural, foi a tabela (T), em três dos nove pares. A linguagem simbólica alfanumérica (A) foi usada por dois dos pares e também dois usaram uma linguagem sincopada (S), pré-simbólica.

Discussão coletiva

No momento de discussão coletiva, o par Carolina e Daniel (II) foi o primeiro a partilhar com a turma a forma como descobriu a relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas (Figura 7.49). Este par identifica uma relação recursiva (RR) entre as variáveis, centrada na diferença entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas. Exibe ainda um nível de generalização factual (F), usando os casos particulares para generalizar uma relação, com sentido de quase-variável, não chegando a nomear a indeterminação.

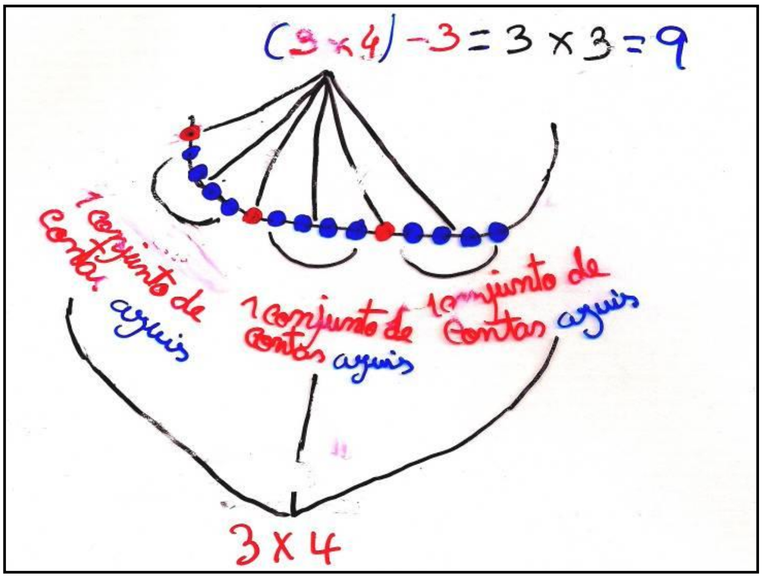


Figura 7.49 – Resolução do par Carolina e Daniel (II) da tarefa 38.

Carolina começa por explicar a representação que utilizaram, identificando os conjuntos de contas azuis e de contas vermelhas. Depois explica como chegaram à "diferença entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas".

> Carolina – Então, nós primeiro fizemos o terceiro colar, que a Maria fez. Fizemos esse exemplo e descobrimos que há três conjuntos: há o conjunto das contas azuis, que é este aqui… É um conjunto de contas azuis, um conjunto de contas azuis e um conjunto de contas azuis. (...) Então nós fizemos três vezes quatro, é um três e um quatro, três vezes quatro. Menos três que é dos três vermelhos e depois igual a três vezes três porque três vezes quatro menos três é igual a três vezes três. Igual a nove.

Alguns colegas reagem à sua apresentação, mostrando dificuldades em compreendê-la. Atendendo a uma solicitação da investigadora, Carolina explica a relação encontrada para outros colares da sequência.

> Investigadora – Explica lá com os outros colares… se isso acontece com os outros colares… a ver se nós entendemos aquilo que tu dizes da diferença. O que é que acontece no primeiro colar, nessa diferença?
> Carolina – Então é quatro vezes um que dá quatro, menos um dá três, a diferença é de três.
> João V. – Como é que a diferença é de três?
> Carolina – A relação é de três em três.
> Investigadora – Então explica lá isso melhor... Vai lá ao segundo colar.
> Carolina – O primeiro é três, se for o segundo é seis, se for o terceiro é nove, se for o quarto é 12, se for o quinto é 16…
> Vários alunos – Não, é 15.
> Investigadora – É 15. Aquilo que este par esteve a pensar é que a diferença vai ser sempre o quê?

Vários alunos – Três.
Investigadora – De três em três, é isso?
Vários alunos – Sim.

Desta forma, Carolina mostra como identificou uma relação entre as variáveis, centrando-se na diferença entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas. No primeiro colar a diferença é de três, no segundo é de seis e assim sucessivamente, identificando, de modo recursivo, que a diferença entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas é sempre de três em três. Este par reconhece a existência de uma relação entre as variáveis, mas não a relação de correspondência entre as mesmas. A relação que apreendeu é uma relação recursiva e que se centra na diferença entre o valor da variável dependente e o valor da variável independente.

Em seguida, a investigadora solicita ao par António e Diogo (IX) que apresente a sua forma de resolução (Figura 7.50). Na tabela que apresentam, estes alunos mostram como encontraram, de forma recursiva, a variação em cada uma das variáveis, através da leitura de cada coluna, de cima para baixo. Para além disso, estes alunos apresentam uma relação direta entre a variável dependente e a variável independente, multiplicando a segunda por quatro para obter a primeira.

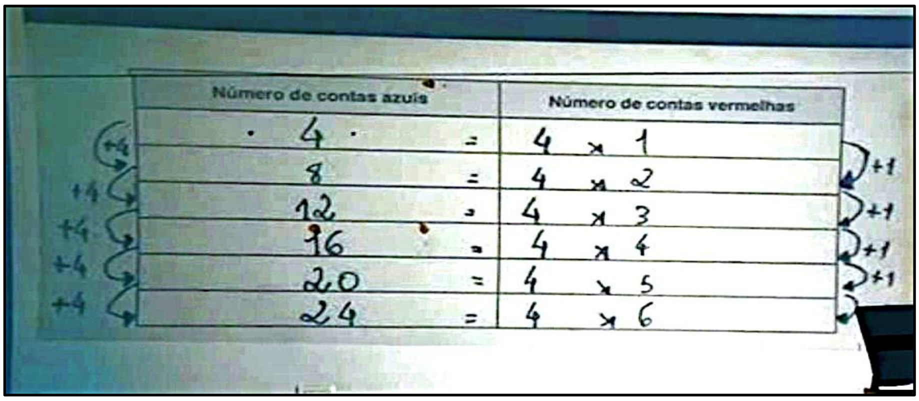


Figura 7.50 – Resolução do par António e Diogo (IX) da tarefa 38.

Quando explicam aos colegas a sua forma de resolução, estes alunos centram-se na análise da variável dependente.

António – Então, nós fizemos a tabuada do quatro que vai de quatro em quatro, que quatro vezes um dá quatro, quatro vezes dois dá oito, quatro vezes três dá 12, quatro vezes quatro dá 16, quatro vezes cinco dá 20, quatro vezes seis dá 24. E aqueles vão sendo mais um. 1, 2, 3, 4, 5, 6. O oito é múltiplo de quatro, o 12 também, o 16 também, o 20 também e o 24 também.

Investigadora – E esses valores aí dizem respeito a quê? Esse quatro, oito e o 12…
Diogo – Ao número de contas azuis…
Investigadora – Então o número de contas azuis é sempre o quê, António?
António – É sempre de quatro em quatro.

Desta forma, estes alunos revelam que encontraram a relação funcional entre as variáveis (RF), mas o seu nível de generalização ainda se encontra muito dependente dos casos particulares que apresentam. Esse nível de generalização é, assim, considerado factual (F) tendo em conta que embora a indeterminação apareça ("é *sempre* de quatro em quatro"), ela não é nomeada de forma explícita. Os casos particulares são, assim, usados com sentido de quase-variável.

No momento de discussão desta resolução, alguns alunos referem que a tabela está confusa por ter introduzido na segunda coluna o "4 × ", comentando que assim o número de contas azuis seria igual ao número de contas vermelhas. Desta forma, estes alunos requerem uma maior explicitação da relação funcional, concluindo que esta deveria estar expressa fora da tabela (Figura 7.51). Neste momento, exploram também a relação entre as operações inversas e Matilde exprime essas relações do seguinte modo: "O número de contas azuis a dividir por quatro é igual ao número de contas vermelhas. O número de contas vermelhas vezes quatro é igual ao número de contas azuis", evidenciando a explicitação da relação funcional (RF) e um nível de generalização global (G).

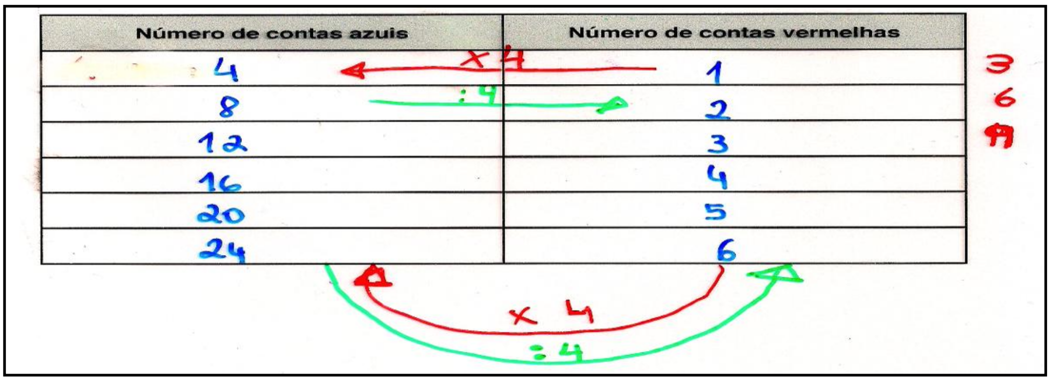
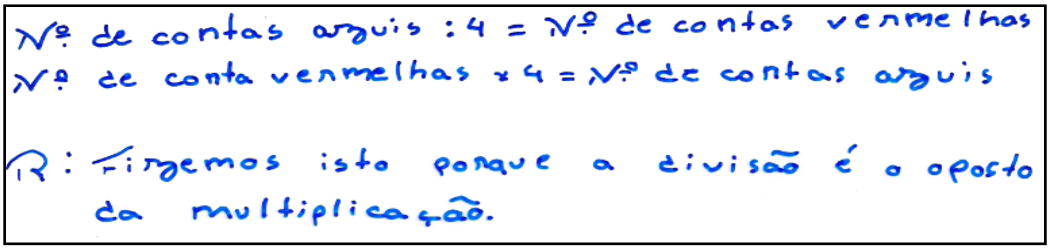


Figura 7.51 – Reconstrução coletiva da tabela na tarefa 38.

Continuando a exploração da tabela, alguns alunos relacionam estas descobertas com a apresentação do par Carolina e Daniel (II), estabelecendo a conexão entre os dois modos de resolução. Neste momento, os alunos voltam a mencionar a questão da "diferença" referida por esse par, como também questionam a validade desse método recursivo para obter generalizações mais distantes.

André – Quatro menos três vai dar o resultado do número de contas vermelhas…
Rita – Mas isso é só porque tu sabes o resultado. Ali no outro é menos seis, no 12 é menos nove e depois isso é porque sabes o resultado, senão não sabias isso…
Fábio – Como aquele grupo disse, que a diferença era sempre três. Mas, para isso ele tinha de saber o resultado, porque senão ele estava a fazer menos três que vai dar dois.
Gonçalo – Ya. Precisam de saber o resultado das duas colunas.
Investigadora – Para utilizar sempre esse pensamento teria de saber a diferença entre cada colar…
Gonçalo – E precisava de saber as duas colunas primeiro.
Fábio – Ya. Porque se não faziam menos três que não ia dar o número de contas vermelhas.

Em seguida, a investigadora solicita ao par Matilde e André (VII) que apresente a sua resolução (Figura 7.52). Este par expressa a relação funcional, usando uma linguagem pré-simbólica, sincopada (S). Revela a relação direta entre a variável dependente e a variável independente (RF), mostrando como calcular o número de contas azuis através do número de contas vermelhas; e apresenta a relação inversa que permite calcular o número de contas vermelhas sabendo o número de contas azuis. Evidencia também um nível de generalização global (G), apresentando regras gerais das relações.


Nº de contas azuis : 4 = Nº de contas vermelhas
Nº de conta vermelhas x 4 = Nº de contas azuis

R: Fizemos isto porque a divisão é o oposto da multiplicação.

Figura 7.52 – Resolução do par Matilde e André (VII) da tarefa 38.

Também o par Gonçalo e Henrique (VI) mostra e explica a forma como reconheceu a relação entre as variáveis (Figura 7.53). Estes alunos apresentam uma representação simbólica (alfanumérica) dessa relação e explicam-na pormenorizadamente.

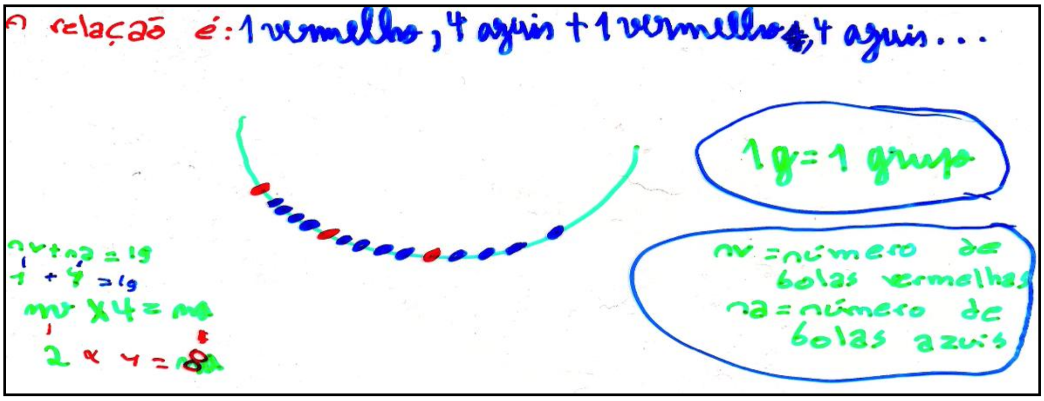


Figura 7.53 – Resolução do par Gonçalo e Henrique (VI) da tarefa 38.

Gonçalo – Primeiro vimos que… a relação era sempre um vermelho, quatro azuis, mais um vermelho e quatro azuis, mais um vermelho e quatro azuis e sempre assim. Depois, só para explicar primeiro antes disso, “$1g$” é um grupo, “nv” é número de bolas vermelhas e “na” é o número de bolas azuis. Aqui fizemos só um exemplo de um colar e aqui fizemos “$nv + na = 1g$”. É assim, “nv” o número de bolas vermelhas dando o exemplo do um, tinha de ser o um, depois o “na” que é o número de bolas azuis que era o quatro, era igual a grupo. Por exemplo, deste vermelho até este azul era um grupo, deste vermelho até este azul era outro grupo, deste vermelho até este azul era outro grupo, depois ia haver muitos mais grupos.
Carolina – Sim, mas como é que um mais quatro igual a um grupo?
Gonçalo – Um mais quatro (aponta para o desenho do colar) o grupo era este pedaço. E depois aqui há o “$nv\ x\ 4 = na$”, por exemplo, era como tinham na tabela, eles disseram que era duas vezes quatro o oito, que era o oito.
(...)
Investigadora – Então e aqui, são capazes de dizer isso de outra forma, Henrique? O que está ali, quer dizer o quê? O número de … o número de quê?
Henrique – Bolas vermelhas.
Investigadora – O número de bolas vermelhas…
Henrique – Vezes quatro…
Investigadora – Vezes quatro… seria igual a quê?
Henrique - Ao número de bolas azuis.

Assim, este par mostra como reconheceu uma relação funcional entre as variáveis (RF) e como consegue estabelecer um nível de generalização global (G). Finalmente, a investigadora solicita ao par Marco e Fábio (III) que mostre a sua resolução (Figura 7.54). Estes alunos também reconhecem a relação funcional entre as variáveis (RF) e expressam a generalização a um nível global (G). Representam essa relação simbolicamente, e através da linguagem alfanumérica, mas utilizam uma simbologia diferente do par anterior.

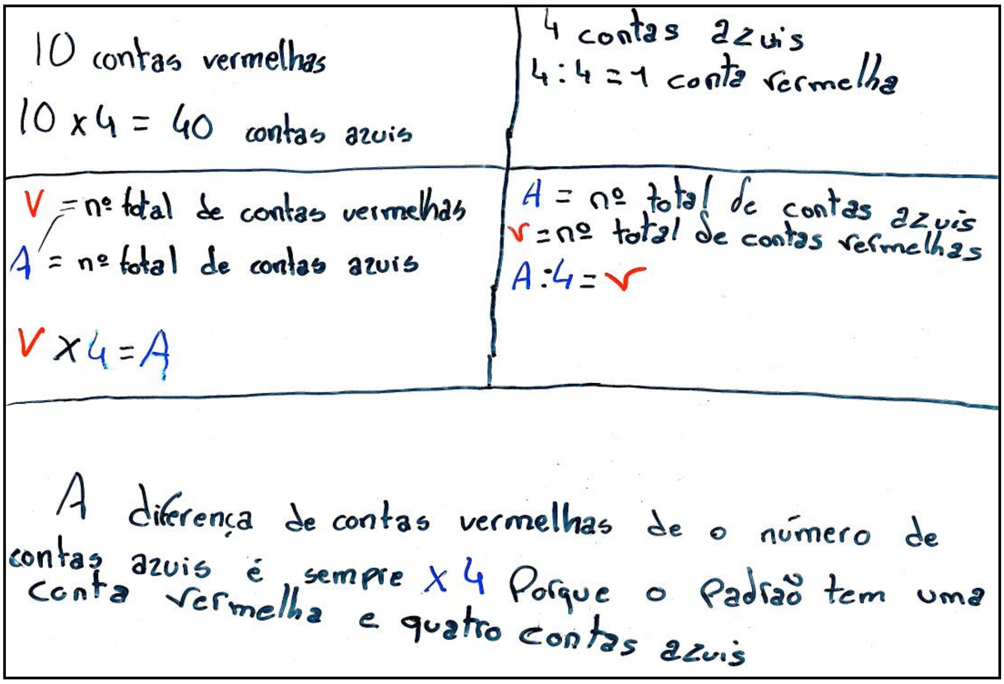


Figura 7.54 – Resolução do par Marco e Fábio (III) da tarefa 38.

Após a apresentação do par Marco e Fábio (III), a investigadora propõe a comparação entre as representações usadas por este par e pelo par Gonçalo e Henrique (VI), projetando os dois acetatos em simultâneo (Figura 7.55). Os alunos comparam as duas representações, referindo as suas diferenças.

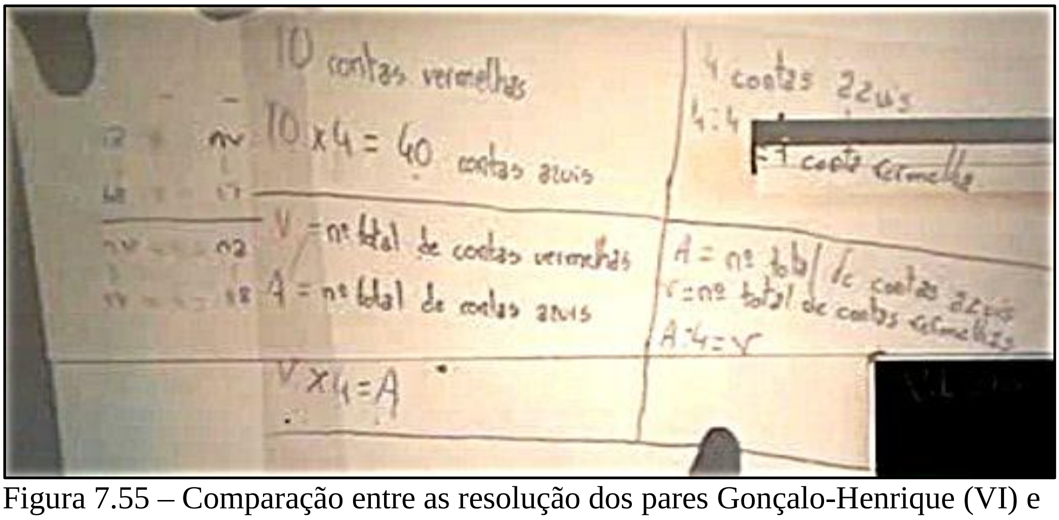


Figura 7.55 – Comparação entre as resolução dos pares Gonçalo-Henrique (VI) e Marco-Fábio (III) na tarefa 38.

Gonçalo – É a mesma coisa. O “v” se não fosse um número qualquer eles punham lá um número. O “v” significa qualquer número, mas têm de ser vermelhas e o “a” qualquer número de azuis e é a mesma coisa.
Carolina – Está ali escrito “v igual a número total de contas vermelhas”.

João – Então, mas pode ser um número qualquer… ali o "a" pode ser o 20, o 40, pode ser um qualquer.
Fábio – Não podem ser números ímpares...
Investigadora – Pronto, isso é verdade na relação, mas entre esta forma de escrever a relação e esta forma de escrever há grandes diferenças? (...) mesmo assim qual será aquela que é mais fácil de usar?
Lawry – A do Fábio.
Investigadora – Porquê? O que é que a do Fábio e do Marco mostra que possa parecer mais fácil?
Daniel – É mais simples.
Rita – Professora, eu acho que a do Gonçalo é mais fácil…

Enquanto alguns alunos se dividem sobre a opção que tomariam para representar a expressão da generalização da relação, a investigadora aproveita para clarificar um aspeto que considera importante na utilização da representação simbólica, através da intervenção do Gonçalo.

Gonçalo – É a mesma coisa, mas só que o meu grupo acrescentou os "n's".
Investigadora – É importante o que está a dizer o Gonçalo porque nós temos de saber que aquele "a" ali não é conta azul, é o número de contas azuis e aquele "v" ali representa o número de contas vermelhas.

Desta forma, procura que os alunos percebam que a representação simbólica que utilizaram deve expressar uma determinada quantidade variável e não o objeto em si mesmo.

7.4.2 Tarefa 40 – "Os colares II"

A tarefa "Os colares II" (enunciado completo no Anexo 3), em continuidade com a descrita anteriormente, apresentava também uma sequência pictórica crescente (Figura 7.56). Esta tarefa é composta por duas partes, na primeira solicitava-se aos alunos que encontrassem uma regra para determinar o número total de contas de qualquer colar e, na segunda parte, explorava-se a relação inversa, procurando-se uma regra para determinar o número do colar sabendo o número total de contas.

A análise aqui apresentada centra-se, primeiramente, no momento de trabalho autónomo dos alunos (seis pares e dois trios) e, em seguida, no momento de discussão coletiva e/ou no momento de sistematização das aprendizagens. A tarefa é apresentada em duas partes, com uma análise individualizada para cada uma. Foca-se no nível de pensamento funcional, no nível de generalização e no tipo de representações evidenciadas pelos alunos.

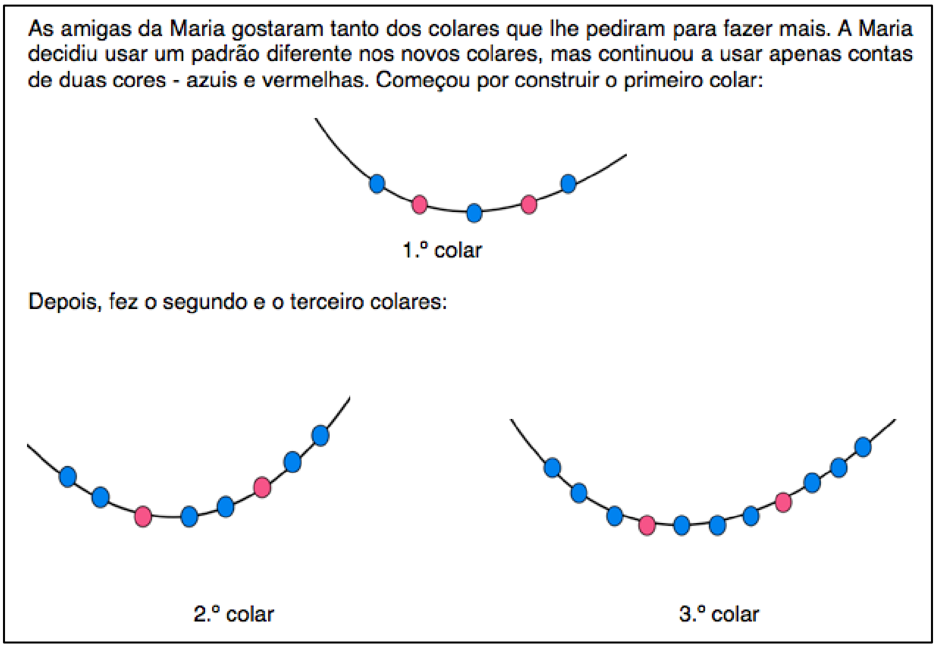


Figura 7.56 – Contexto da tarefa 40 “Os colares II”.

Primeira parte da tarefa – Trabalho autónomo dos alunos

A forma como os diferentes pares de alunos (I ao VIII) reconheceram a relação entre as variáveis – número do colar e número total de contas – foi analisada de acordo com o nível de pensamento funcional. O Quadro 7.36 indica o nível de pensamento funcional dos alunos na primeira parte desta tarefa.

Quadro 7.36 – Nível de pensamento funcional dos pares de alunos na primeira parte da tarefa 40.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total
NR									0
RR									0
RC									0
RF	x	x	x	x	x	x	x	x	8

Todos os oito grupos conseguiram reconhecer uma relação direta entre a variável dependente (número total de contas) e a variável independente (número do colar) e enunciar uma regra geral sobre a mesma. Assim, todos os alunos reconheceram a relação funcional (RF) entre as variáveis.

Quadro 7.37 – Nível de generalização dos pares de alunos na primeira parte da tarefa 40.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total
NG									0
A									0
F									0
C			x	x		x		x	4
G	x	x			x		x		4

Metade dos oito grupos evidencia um nível de generalização global (G), enunciando a indeterminação independentemente do contexto da situação (Quadro 7.37). A outra metade apresentou um nível de generalização contextual (C), nomeando a indeterminação, mas ainda dependendo da descrição do contexto da situação para a definição da regra geral.

Quadro 7.38 – Relação entre o nível de pensamento funcional e o nível de generalização dos pares de alunos na primeira parte da tarefa 40.

		Nível de generalização				
		NG	A	F	C	G
Nível de pensamento funcional	NR					
	RR					
	RC					
	RF				4	4

Relacionando o nível de pensamento funcional com o nível de generalização (Quadro 7.38) constata-se que todos os grupos reconheceram a relação funcional, metade dos quais evidenciando um nível de generalização global (G) e a outra metade um nível de generalização contextual (C).

O Quadro 7.39 apresenta os tipos de representação utilizados pelos grupos. Os tipos de representação mais utilizados pelos grupos foram a linguagem simbólica alfanumérica (A) e a linguagem natural (LN). Para além dessas representações, um grupo usou o desenho (D) em simultâneo com mais dois tipos de representação: linguagem natural (LN) e alfanumérica (A). Dos oito pares, três usaram mais do que um tipo de representação, sendo um deles sempre a linguagem natural. Dos restantes cinco grupos que usaram apenas um tipo de representação, três representaram a relação através da linguagem simbólica alfanumérica.

Quadro 7.39 – Tipo de representação usado pelos pares de alunos na primeira parte da tarefa 40.

R	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total
LN	x	x				x	x	x	5
N									0
D		x							1
Dg/E								x	1
T									0
S									0
I									0
A		x	x	x	x	x	x		6
Total	1	3	1	1	1	2	2	1	

Discussão coletiva e momento de sistematização

A discussão coletiva centrou-se na forma como os alunos reconheceram uma relação entre as variáveis da sequência e como expressaram essa relação numa regra geral. O par João P. e Henrique (VI) foi o primeiro a apresentar a sua resolução à turma (Figura 7.57).

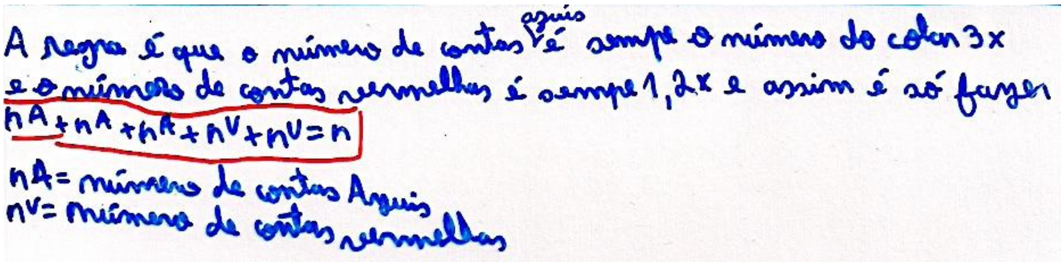

A regra é que o número de contas azuis é sempre o número do colar 3x e o número de contas vermelhas é sempre 1,2x e assim é só fazer
nA+nA+nA+nV+nV=n
nA= número de contas Azuis
nV= número de contas vermelhas

Figura 7.57 – Resolução do par João P. e Henrique (VI) na primeira parte da tarefa 40.

Este par explicou a sua resolução usando o desenho dos colares. Começou por explicar como visualizou a relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas no primeiro colar. Depois explica como encontrou o número total de contas de qualquer colar, adicionando o número de contas azuis com o número de contas vermelhas.

> João P. – Então, aqui (apontando para o primeiro colar) tem um azul em cada, só que estão separados. Por isso nós pusemos um vezes três, que ao todo são três azuis. E depois o vermelho, pusemos um vezes dois. São duas contas vermelhas. (...) A regra é que o número de contas é sempre o número do colar três vezes e o número de contas vermelhas é sempre um duas vezes. (...) Então, como nós dizemos três vezes, fizemos na mais na mais na, três vezes e depois como é sempre dois vermelhos, fizemos nv mais nv é igual a n que é o número total de contas.

Estes alunos reconheceram a relação entre as variáveis de forma funcional (RF), percebendo a relação direta entre elas de forma a evidenciar como a variação de uma variável faz corresponder à variação da outra variável. No entanto, a forma como expressam essa relação é ainda muito dependente do contexto da situação. Isso é evidente quando os alunos se referem às contas do colar descrevendo a sua disposição espacial: "tem uma azul em cada, só que estão separadas... ao todo são três azuis...". A disposição espacial das contas azuis e vermelhas no colar influencia a escrita da regra, separando cada conta, embora com imprecisões quando referem "na" ou "nv", não como o número variável de contas, mas representando a unidade. Tendo em conta a dependência do contexto espacial e visual da sequência, o nível de generalização é considerado contextual (C), não permitindo uma abordagem mais geral da relação. A forma de representação utilizada pelo grupo, embora possa ser considerada alfanumérica, não respeita a compreensão da noção de variável no que respeita ao número de contas vermelhas, pois apresenta "nv" como uma unidade ($nv + nv = 2$) e não como um número variável de contas vermelhas.

A partir da apresentação deste par, Rita refere que expressou de outra forma a relação. Esta aluna escreve, no quadro, a regra definida pelo seu grupo (IV) (Figura 7.58).

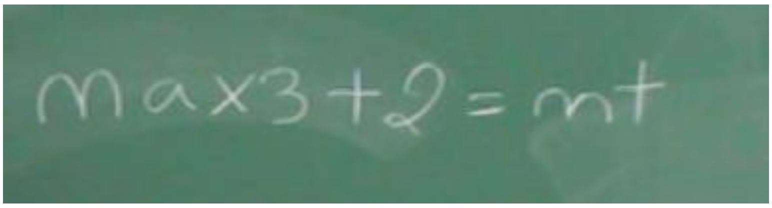


Figura 7.58 – Resolução do grupo Rita, Diogo e Beatriz (IV) da primeira parte da tarefa 40.

A investigadora propõe que sejam comparadas as duas regras já apresentadas. Rita começa por explicar a simbologia usada na definição da sua regra. Refere como considerou constante o número de contas vermelhas, identificando isso na escrita da regra. Questionada pela investigadora, Rita explica isso e outros alunos referem também como reconheceram como constante o número de contas vermelhas em todos os colares da sequência.

> Rita – O nt quer dizer número total, o na quer dizer o número de contas azuis. Então, eles ali puseram na mais na mais na, então, nós em vez de estarmos a pôr na mais na mais na pusemos três vezes. E depois eles fizeram nv mais nv, então o nv é dois e nós pusemos aqui dois.
> (...)
> Investigadora – Então, aquele nv mais nv, não o conhecemos já?
> Rita – Conhecemos, que é o dois.

Investigadora – Nos colares todos é sempre...
Vários alunos – Dois.
Investigadora – É sempre o mesmo número. Num colar qualquer podemos ter um número de contas vermelhas diferente?
Vários alunos – Não.
Investigadora – Então, este nv mais nv teria de ser substituído pelo quê?
Vários alunos – Dois.

Outra aluna, Matilde, refere ainda como a forma correta de escrever o número de contas vermelhas não poderia ser “nv”. Desta forma, esta aluna evidencia a sua conceção de variável, distinguindo-a do valor constante que é o número de contas vermelhas em cada colar da sequência.

Matilde – O v é sempre dois por isso é que não se pode pôr nv.
Investigadora – Diz lá, Matilde, vamos ouvir a Matilde.
Matilde – Porque assim é um número qualquer de contas vermelhas.
Investigadora – E isso pode acontecer? Um número qualquer de contas vermelhas neste tipo de colares?
Vários alunos – Não.

Em seguida, a investigadora solicita ao par João V. e Lawry (VIII) que apresente à turma a sua forma de resolução (Figura 7.59). Este par reconheceu a relação funcional entre as variáveis (RF) num nível de generalização contextual (C). Na sua resolução, o par começa por apresentar a resposta à primeira questão da tarefa que pedia para determinar o número total de contas do quarto colar. Apresenta a resposta correta (14 contas) e acrescenta uma representação pictórica das contas azuis e vermelhas desse colar.

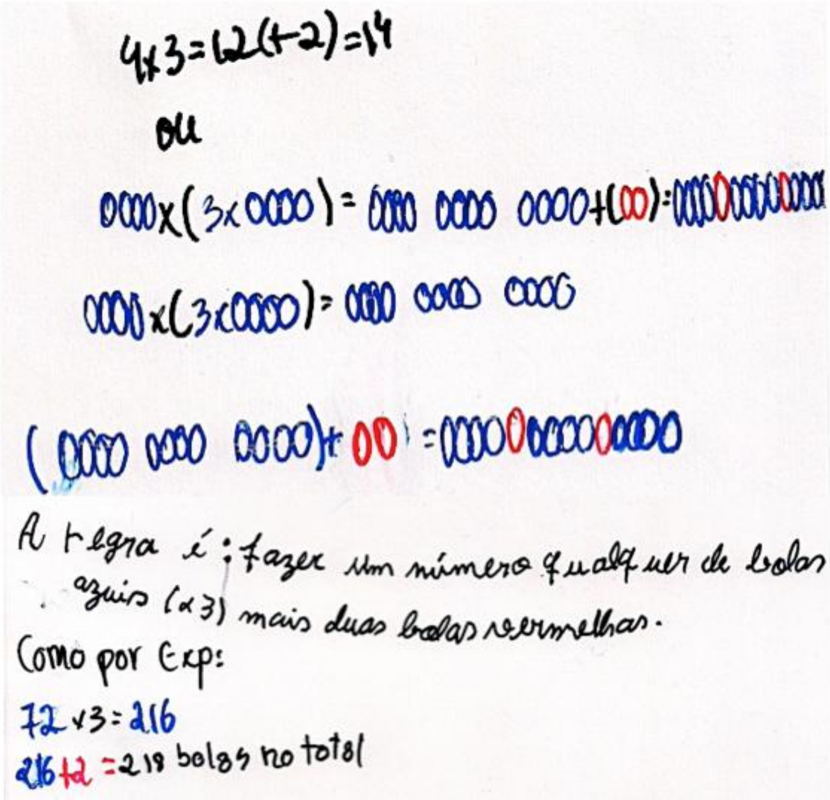


Figura 7.59 – Resolução do par João V. e Lawry (VIII) da primeira parte da tarefa 40.

Nessa representação, estes alunos desenham corretamente os grupos de contas azuis e as duas contas vermelhas do quarto colar usando a adição, embora com incorreções no que respeita à multiplicação. Quando explica essa representação à turma, João V. refere que, em cada colar, havia três grupos de contas azuis e mostra como determinaram, no quarto colar, o número total de contas.

> João V. – Então, nós vimos que, nos colares todos tinham três grupos de bolas azuis, em todos os colares. Então, nós vimos que quatro mais quatro mais quatro dava 12. E depois mais as duas bolas dava 14. E nós fizemos isso aqui de duas formas.
> Investigadora – Estão a ver o que é que aquelas bolinhas significam?
> Fábio – Aquilo significa bolas ou zeros?
> João V. – É bolas. Nós fizemos quatro vezes três que é a conta que dá 12, que são quatro bolas azuis vezes três grupos de quatro bolas, dá 12, mais duas bolas vermelhas é igual a 14.

Como se verifica na Figura 7.59, para além destes tipos de representação, o par apresenta também uma regra geral em linguagem natural e usa um exemplo para explicar a regra que enunciou. Quando explicam esse exemplo à turma, estes alunos mostram que reconhecem a relação entre o número de contas azuis e o número do colar.

João V. – Fizemos um exemplo. Que era 72 vezes três que dava 216 e depois 216 mais duas vermelhas é igual a 218 bolas no total.
Investigadora – Então, e esse colar que tem 218 bolas no total, qual é o colar? Qual é o número desse colar?
João V. – Setenta e dois.

Em seguida, a investigadora pede ao grupo do Fábio, António e Marco (III) que apresente a sua resolução (Figura 7.60). Fábio explica a regra que apresenta à turma.

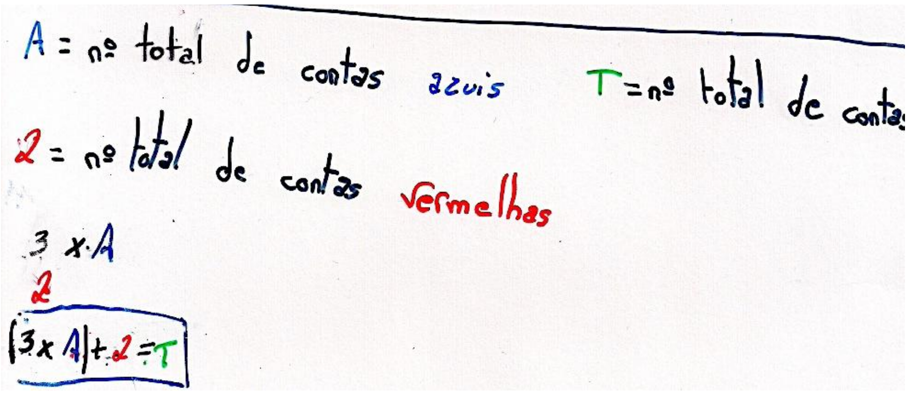


Figura 7.60 – Resolução do grupo Fábio, António e Marco (III) da primeira parte da tarefa 40.

Fábio – O A é o número total de contas azuis e o T é o número total de contas. Se fizermos como lá em cima, o número total de contas azuis vezes três e depois o número total de contas vermelhas que é sempre dois. Se fizermos o número total de contas azuis mais dois dá o número total de contas.

Desta forma, estes alunos revelam a relação funcional entre as variáveis (RF) e expressam a generalização a um nível contextual (C), ainda dependendo do contexto da situação. Usam uma linguagem simbólica alfanumérica para expressar a regra geral, identificando o significado que atribuem a cada variável. No entanto, como identificam "A" como o número total de contas azuis e colocam na regra "$3 \times A$", um aluno, Gonçalo, questiona essa opção e outros alunos também interferem no sentido de esclarecer o significado da simbologia utilizada pelo par.

Gonçalo – Só uma coisa, três vezes o A vai dar... "*A* mais dois" não é o total.
Fábio – É. Porque aquele A é o total de contas azuis.
João V. – Devias ter explicado ali que o A também era as contas azuis.
Fábio – Como nós fizemos aqui. Fizemos o A vezes três que ia dar o número total de contas azuis.
João V. – Podias ter dito que aquele A já estava somado.
Investigadora – Este *A* está a representar a mesma coisa? O que é que é o *A*?
Vários alunos – É o número total de contas azuis.

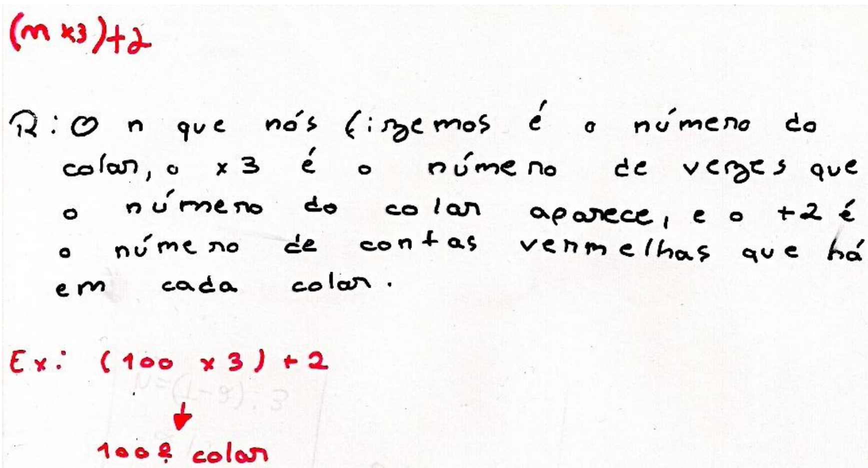
Investigadora – E o número total de contas azuis mais dois dá-me o total das contas?
Fábio – Dá.
Investigadora – Ok. E este A (apontando para $3 \times A$) é o quê?
João Vago – Mas eles ali disseram que o A era o número total de contas azuis.
Investigadora – Então, é três vezes o número total de contas azuis?
Fábio – Não.
Gonçalo – Não, [isso] é três vezes o A.
Investigadora – E isso é que vai ser igual a...
Fábio – T.

Fábio não consegue ser muito explícito na distinção entre o que considera ser A e $3 \times A$, criando alguma confusão na utilização das duas formas de representação. É Gonçalo quem procura fazer a distinção entre o número de contas azuis de um grupo (A) e o número de contas azuis de um colar ($3 \times A$), embora ainda sem grande clareza.

Nesta altura, a investigadora propõe a comparação entre a forma de escrever a regra apresentada por este grupo ($(3 \times A) + 2 = T$) e a forma como o grupo da Rita (IV) a escreveu ($(3 \times na) + 2 = nt$). Os alunos não consideram existir diferenças entre estas duas formas simbólicas de representar a generalização.

Gonçalo – Nenhuma. Só que eles ali acrescentaram o número de azuis.
Fábio – Se tirássemos aqui o n, era igual.
Gonçalo – Eles pensaram que o número de contas azuis é o A e eles pensaram que era na.

Em seguida, o par Matilde e André (VII) apresenta a sua resolução à turma (Figura 7.61). Mostra uma regra geral que expressa a relação funcional entre as variáveis (RF) e um nível de generalização global (G), não se centrando no contexto da situação. Este par apresenta a regra através da linguagem simbólica alfanumérica e identifica o que significa cada elemento na representação usada.



$(n \times 3) + 2$

R: O n que nós fizemos é o número do colar, o ×3 é o número de vezes que o número do colar aparece, e o +2 é o número de contas vermelhas que há em cada colar.

Ex: $(100 \times 3) + 2$

100º colar

Figura 7.61 – Resolução do par Matilde e André (VII) da primeira parte da tarefa 40.

Na altura em que Matilde explica a sua resolução, alguns colegas referem que deveria ser escrito “$3 \times n$” em vez de “$n \times 3$”, considerando que “está a fazer-se três vezes o n” e não o contrário. Nesse momento, Matilde corrige a regra, escrevendo “$(3 \times n) + 2$”. Tendo em conta a explicação da regra dada pela aluna, a investigadora propõe aos alunos que verifiquem se existe algum dado novo trazido por este par na escrita da regra. Pretende que os alunos identifiquem a variável independente “número do colar”, exposta por este par. Matilde é a primeira a reconhecer essa diferença.

Matilde – Em vez de ser o número de contas azuis, troca-se pelo número do colar.
Gonçalo – Sim, porque o número do colar é igual ao número de contas azuis.
Investigadora – Então, explica lá isso aqui (projetando o acetato com a imagem dos colares).
Matilde – Por exemplo, aqui no segundo colar, o número de contas azuis é dois em cada conjunto. No terceiro aqui é três. No primeiro é um. Nós fizemos com o número do colar.

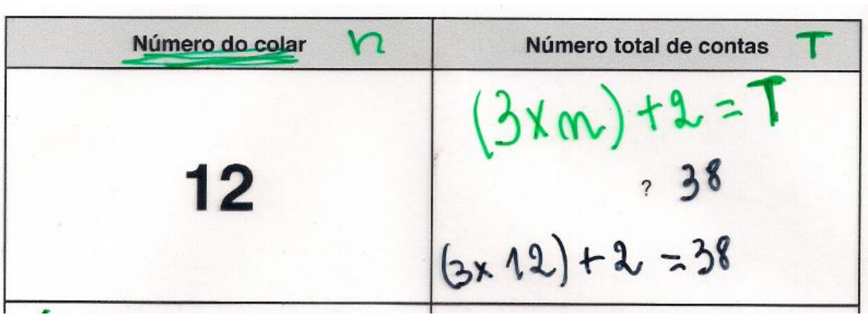
No entanto, uma aluna, Rita, parece não entender essa diferença levando a turma a uma discussão interessante. A investigadora conduz os alunos à identificação da variável independente.

Rita – Professora, não estou a perceber.
Investigadora – Então vamos lá discutir esta questão. Em vez de escrever o número de contas azuis, a Matilde e o André escreveram o número do colar.
Rita – Isso assim está mal.
Gonçalo – Não, não, é a mesma coisa.
Matilde – É a mesma coisa. O número do colar, por exemplo, é o segundo e o número de contas azuis é dois.
Investigadora – Em cada grupo.

Rita – Então, mas isso assim é duas vezes dois.
Matilde – É dois vezes três porque há três (apontando para os grupos de contas azuis no segundo colar).
Gonçalo – Há três grupos de dois.
Investigadora – No segundo colar para saber o total, é três vezes dois mais dois. No primeiro colar?
Gonçalo – Três vezes um mais dois.
Investigadora – No terceiro colar?
Vários alunos – Três vezes três mais dois.
Investigadora – No quinto colar?
Gonçalo – Três vezes cinco mais dois.
Investigadora – O que é que é esse cinco?
Gonçalo – É o número de bolas azuis e o número do colar.
Investigadora – Mas é mesmo o número de bolas azuis?
Vários alunos – Não.
Gonçalo – Não é todo.
Investigadora – Ah, é um conjunto. E o número de bolas azuis de um conjunto corresponde ao número do colar (contornando um conjunto de bolas azuis de cada colar e o número de cada colar nas imagens dos colares). Qual era a nossa pergunta? (projetando a pergunta). "Encontra uma regra que te permita dizer o número total de contas em qualquer colar deste tipo". Como é que me ajuda mais, eu pensar no número de bolas azuis ou no número do colar?
Vários alunos – No número do colar.
Gonçalo – Porque se soubermos o número do colar também já sabemos o número das azuis de cada grupo.

No excerto apresentado, a investigadora procura também esclarecer a questão do número de contas azuis por grupo que tinha suscitado alguma confusão na apresentação do grupo de Fábio, António e Marco. Assim, o número de contas azuis de cada grupo é reconhecido por alguns alunos, como Gonçalo, como o número respeitante à ordem do colar.

Para finalizar esta primeira parte da discussão coletiva, a investigadora propõe uma sistematização da regra encontrada. Partindo do exemplo do colar número 12, os alunos mostram como calcularam o número total de contas desse colar. Desta forma, aplicam a regra já discutida e escrevem a sua forma geral (Figura 7.62).



Número do colar n	Número total de contas T
12	$(3 \times n) + 2 = T$? 38 $(3 \times 12) + 2 = 38$

Figura 7.62 – Preenchimento da tabela de sistematização na primeira parte da tarefa 40.

Nesse momento, a investigadora explora com os alunos a importância da identificação das variáveis e do seu significado. O excerto seguinte mostra como Rita ainda apresenta dificuldade em distinguir entre "o número total de contas azuis" e "o número de contas azuis de um conjunto".

> Investigadora – É o número de contas azuis de cada grupo, mas é o número do colar.(...) Se eu usar o número de azuis aqui eu posso pensar que é o número total de azuis. E eu quero dizer que é o número de azuis num grupo.
> Rita – Num grupo?
> Investigadora – Não é o número total de azuis?
> Rita – É.
> Investigadora – Ai é? Nesta regra que está aqui (apontando para a regra $(3xna) + 2$) é o número total de azuis?
> Gonçalo – Não, é só um grupo.
> Investigadora – Se for o número total de azuis é seis vezes três, no segundo colar. Vamos ver o segundo colar. Para aplicar a nossa regra. Qual é o número total de azuis no segundo colar?
> João Vago – Seis.
> Rita – Mas isso está mal.
> Investigadora – Pois está mal. O que é que é aquele na ali?
> João V. – É o número de azuis em cada grupo.
> Investigadora – É o número de azuis em cada grupo. Qual é o número de azuis em cada grupo?
> Vários alunos – Dois.
> Investigadora – Três vezes dois é igual a seis, mais dois igual a oito. Isto está certo?
> Vários alunos – Sim.

A investigadora aplica a regra para vários colares e diferentes alunos reconhecem que o número total de contas azuis não é equivalente ao número de contas azuis de um conjunto. Reconhecem ainda que, na regra geral, a variável identificada é o "número de contas azuis de um conjunto". Tendo em conta que o número de contas azuis é equivalente ao número de ordem de cada colar, a investigadora conduz os alunos à necessidade de explicitarem de forma clara a identificação das variáveis a que se referem.

> Investigadora – Então, o número de azuis em cada colar, em cada grupo, não pode ser confundido com o número total de azuis. Por isso, qual é a melhor forma de eu fazer?
> Matilde – É o número do colar.
> Investigadora – É usar o número do colar. Se é o 2º colar, é usar o número dois.
> Fábio – É a mesma coisa.
> Investigadora – É a mesma coisa, mas quando eu represento a regra tenho de dizer o que é que aquilo significa. Não pode ser o número total de contas azuis.

Segunda parte da tarefa – Trabalho autónomo dos alunos

Na segunda parte da tarefa era solicitado aos alunos que expressassem a regra para determinar o número do colar sabendo o número total de contas. Pretendia-se, assim, que os alunos identificassem a relação inversa e usassem as operações inversas na definição da regra.

O Quadro 7.40 sistematiza a categorização das resoluções dos grupos de alunos quanto ao nível de pensamento funcional. Constata-se que todos os grupos apreenderam a relação funcional (RF) apresentando uma relação de correspondência entre as variáveis.

Quadro 7.40 – Nível de pensamento funcional dos grupos de alunos na segunda parte da tarefa 40.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total
NR									0
RR									0
RC									0
RF	x	x	x	x	x	x	x	x	8

Relativamente ao nível de generalização, o Quadro 7.41 sistematiza a categorização das resoluções dos grupos. Seis grupos apresentam um nível de generalização global (G) e dois ainda se centram no contexto da situação (C) para expressar a generalização da relação.

Quadro 7.41 – Nível de generalização dos grupos de alunos na segunda parte da tarefa 40.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total
NG									0
A									0
F									0
C		x						x	2
G	x		x	x	x	x	x		6

Relacionando o nível de pensamento funcional com o nível de generalização (Quadro 7.42) constata-se que todos os grupos conseguiram um nível de generalização algébrica, embora dois dos grupos ainda se centrem na descrição do contexto da situação para expressar a generalização.

Quadro 7.42 – Relação entre o nível de pensamento funcional e o nível de generalização dos grupos de alunos na segunda parte da tarefa 40.

		Nível de generalização				
		NG	A	F	C	G
Nível de pensamento funcional	NR					
	RR					
	RC					
	RF				2	6

No que concerne às representações usadas pelos grupos (Quadro 7.43), constata-se que os alunos representaram a relação através apenas de dois tipos de representação: a linguagem natural e a linguagem simbólica alfanumérica. A maior parte dos grupos usou a linguagem natural para expressar a relação. Metade dos grupos usou a linguagem simbólica alfanumérica, sendo que dois apenas usaram esse tipo de representação. Dois grupos usaram em simultâneo a linguagem natural e a linguagem simbólica alfanumérica.

Quadro 7.43 – Tipo de representação usado pelos grupos de alunos na segunda parte da tarefa 40.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total
LN	x	x		x		x	x	x	6
N									0
D									0
Dg/E									0
T									0
S									0
I									0
A		x	x		x		x		4
Total	1	2	1	1	1	1	2	1	

Momento de sistematização

Tendo em conta o tempo disponível, não foram apresentadas as várias resoluções dos grupos e a discussão centrou-se no preenchimento da segunda parte da tabela de sistematização (Figura 7.64). Nesse momento, o par Gonçalo e Joana (V) apresentou a regra geral da relação inversa partindo do exemplo de um colar com 647 contas no total. A Figura 7.63 apresenta o procedimento que estes alunos efetuaram e o excerto seguinte mostra como o explicaram à turma.

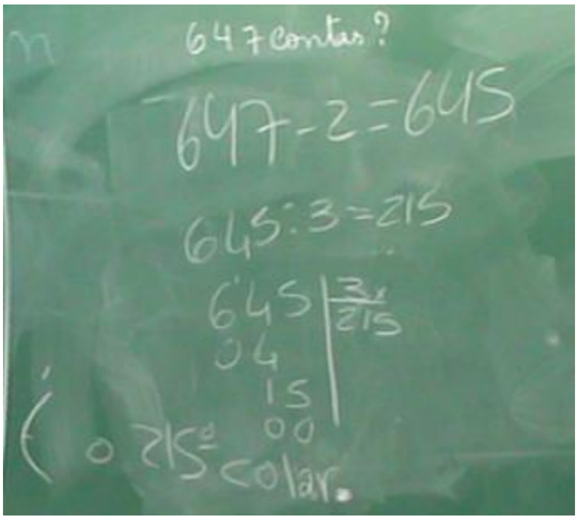
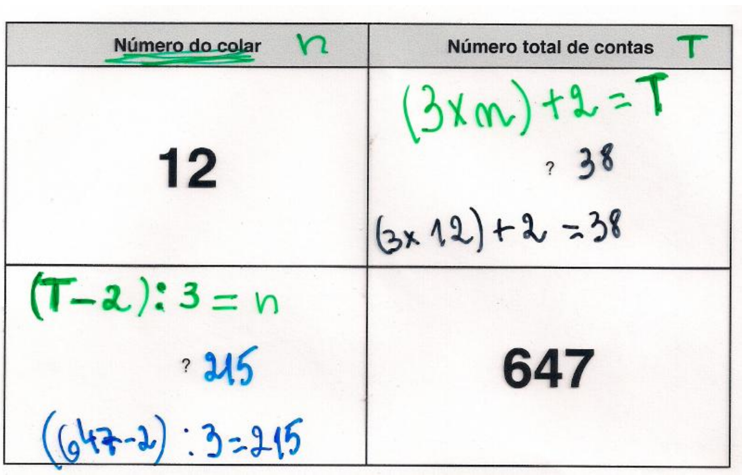


Figura 7.63 – Resolução do par Gonçalo e Joana (V), na segunda parte da tarefa 40.

Gonçalo – Então, nós fizemos, como o João V. já tinha dito, o contrário.
Investigadora – Ou seja, pegaram no 647 que é o número total de contas e ...
Gonçalo – Tirámos as vermelhas.
Investigadora – As vermelhas são quantas, Diogo?
Diogo – Duas.
Investigadora – E ficaram com 645. O que é que é o 645?
Gonçalo – É o número total de azuis.
Investigadora – E depois?
Gonçalo – Depois pegámos no número total de azuis e dividimos pelo três.
Investigadora – Porquê?
João V. – Porque são três grupos de azuis.
Gonçalo – Porque eram três grupos. Era três grupos de 215.
Investigadora – Cada grupo tinha 215 bolas azuis. E isso diz-me o que tinha cada grupo e mais?
Gonçalo – E o número do colar. (...) Se soubéssemos o número do colar era isso vezes três, mais dois que dava o total das contas.



Número do colar n	Número total de contas T
12	$(3 \times n) + 2 = T$? 38 $(3 \times 12) + 2 = 38$
$(T-2) : 3 = n$? 215 $(647-2) : 3 = 215$	647

Figura 7.64 – Preenchimento da tabela de sistematização na segunda parte da tarefa 40.

7.4.3 Tarefa 41 – "Cubos com autocolantes"

A última tarefa em análise também explorava uma sequência pictórica crescente (Anexo 3), introduzida a partir do contexto apresentado no enunciado da Figura 7.65. A tarefa explorava a situação de uma construção tridimensional envolvendo diferentes números de cubos interligados onde se colavam autocolantes nas faces visíveis. Pretendia-se que os alunos expressassem a relação entre o número de cubos numa construção e o número de autocolantes, e determinassem uma regra geral dessa relação.

Na apresentação da tarefa, a situação foi modelada com o recurso a materiais concretos, elaborando-se conjuntamente com os alunos a construção apresentada no enunciado. Durante o trabalho autónomo foram distribuídas aos diferentes grupos (três pares e quatro trios) construções com dois e três cubos, com os autocolantes colados. Após o momento de trabalho autónomo, seguiu-se a discussão coletiva.

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.

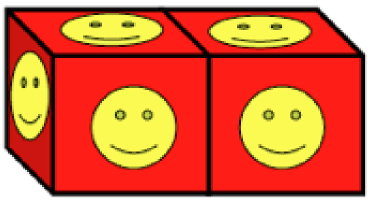


Figura 7.65 – Contexto da tarefa 41 "Cubos com autocolantes".

Trabalho autónomo dos alunos

O Quadro 7.44 sistematiza a forma como os diferentes grupos reconheceram a relação entre as variáveis. Verifica-se que todos os grupos perceberam a relação direta entre a variável dependente e a variável independente, evidenciando como uma correspondia a outra (RF). De facto, durante o momento de trabalho autónomo, constatou-se que foi com muita facilidade que os alunos dos diferentes grupos enunciaram uma regra funcional da relação entre o número de cubos e o número de autocolantes.

Quadro 7.44 – Nível de pensamento funcional dos grupos de alunos da tarefa 41.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	Total
NR								0
RR								0
RC								0
RF	x	x	x	x	x	x	x	7

O Quadro 7.45 indica o nível de generalização apresentado pelos alunos. Todos os grupos conseguiram apresentar a regra geral de uma forma global (G), não recorrendo à descrição do contexto da situação e nomeando a indeterminação.

Quadro 7.45 – Nível de generalização dos grupos de alunos da tarefa 41.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	Total
NG								0
A								0
F								0
C								0
G	x	x	x	x	x	x	x	7

Relacionando o nível de pensamento funcional com o nível de generalização (Quadro 7.46) constata-se que todos os grupos conseguiram reconhecer a relação funcional e expressá-la num nível de generalização algébrica, de nível global.

Quadro 7.46 – Relação entre o nível de pensamento funcional e o nível de generalização dos grupos de alunos da tarefa 41.

		Nível de generalização				
		NG	A	F	C	G
Nível de pensamento funcional	NR					
	RR					
	RC					
	RF					7

No que concerne às representações usadas pelos grupos (Quadro 7.47), pode perceber-se que os alunos utilizaram com a mesma frequência tanto a linguagem natural como a linguagem simbólica alfanumérica. Um grupo usou também uma linguagem simbólica, mas idiossincrática. Para além destes tipos de representação, o desenho foi usado por dois grupos e a tabela foi apresentada por um. Constata-se ainda que a maior parte dos grupos optou por usar, pelo menos, dois tipos de representação em simultâneo.

Quadro 7.47 – Tipo de representação usado pelos grupos de alunos da tarefa 41.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	Total
LN	x	x		x		x	x	5
N								0
D						x	x	2
Dg/E								0
T		x						1
S								0
I							x	1
A	x	x	x	x	x			5
Total	2	3	1	2	1	2	3	

Discussão coletiva

O par João V. e Lawry (VII) foi o primeiro a apresentar a sua forma de resolução à turma (Figura 7.66). Este par apresenta a relação entre o número de cubos e o número de autocolantes através de três representações diferentes: linguagem natural, desenho e linguagem simbólica idiossincrática. O desenho mostra a forma como reconheceu as diferentes faces dos cubos e a sua implicação na formulação da regra. Apresenta uma regra onde usa uma simbologia própria (idiossincrática) com setas de direção para indicar como visionou as diferentes faces do cubo. Tem ainda o cuidado de construir uma legenda para clarificar o significado atribuído a cada um desses símbolos. O desenho que apresenta mostra um exemplo da forma como determinou o número de autocolantes para oito cubos.

Embora o nível de generalização apresentado na escrita da regra seja global (G), por não se apoiar na descrição do contexto da situação, a forma como o par descreve pormenorizadamente a escrita da regra é fortemente apoiada nesse contexto. Ou seja, a tentativa de clarificar a explicação conduz estes alunos à descrição do contexto da situação.

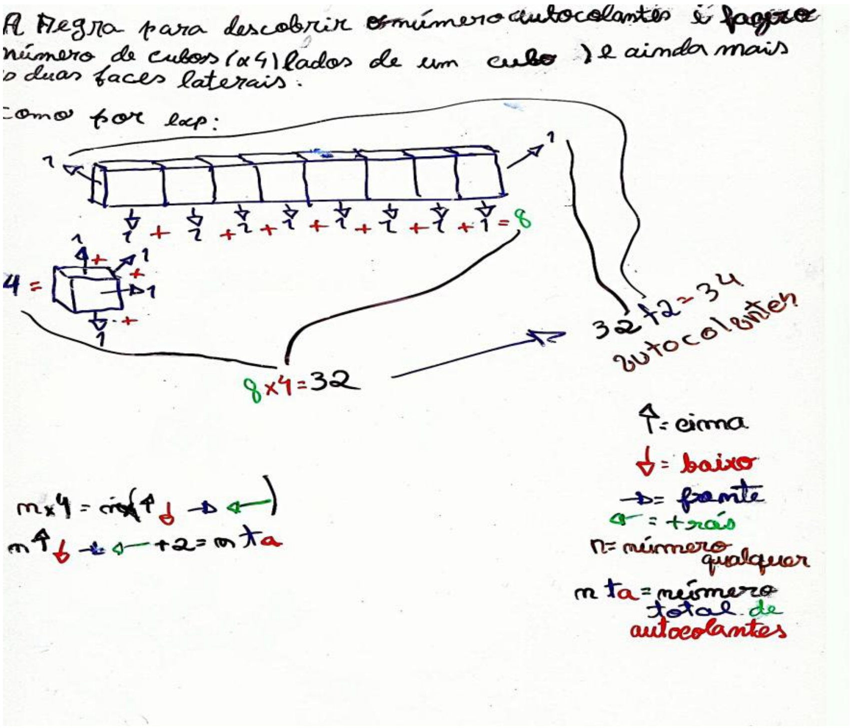


Figura 7.66 – Resolução do par João V. e Lawry (VII) da tarefa 41.

Na apresentação à turma, este par é igualmente cuidadoso na forma como explica a sua resolução. Por sugestão da investigadora utiliza um dos cubos de madeira para clarificar a simbologia própria que utilizou na escrita da regra.

> João V. – Então nós dissemos que "a regra para descobrir o número de autocolantes é fazer o número de cubos que era pedido, que é dado, vezes quatro lados, vezes quatro que são os quatro lados do cubo e ainda mais as duas faces laterais, mais somar as duas faces laterais". E nós demos um exemplo. Neste caso temos aqui oito cubos, está aqui representado cada cubo e depois aqui as faces laterais, como nós dissemos aqui em cima. Então, somámos, pusemos oito mais as laterais. Depois mostrámos aqui o cubo e depois fizemos oito cubos vezes quatro lados vai dar 32, são oito cubos certo? Aqui nós (aponta para a representação de um só cubo) representamos quatro lados: frente, atrás, cima e baixo.
> Investigadora –Tens aí um cubo se quiseres utilizar. Diz lá o que queres dizer com isso.
> (O aluno pega no cubo de madeira e exemplifica para a turma, apontando para as faces do cubo.)
> João V. – Cima, baixo, frente e atrás. (...) O que estou aqui a explicar (aponta para o desenho de um só cubo que tem no acetato e de seguida volta a explicar apontando para as faces do cubo de madeira) um lado de cima, mais um lado de baixo, mais um de frente e mais um lado de trás, dá quatro lados, não estamos a contar com os lados laterais. Depois nós fizemos oito cubos vezes quatro lados e deu 32, depois como as faces laterais ainda não tínhamos somado, somámos 32 mais duas faces laterais que deu 34 autocolantes.

Em seguida, o par Henrique e João P. (VI) apresenta a sua forma de resolução (Figura 7.67). Este par utiliza a linguagem natural e o desenho como representações. A regra apresentada em linguagem natural nomeia a indeterminação de forma global e trata-a analiticamente, não se apoiando na descrição do contexto. Apresenta, assim, um nível de generalização global (G) e reconhece a relação funcional (F) entre as variáveis.

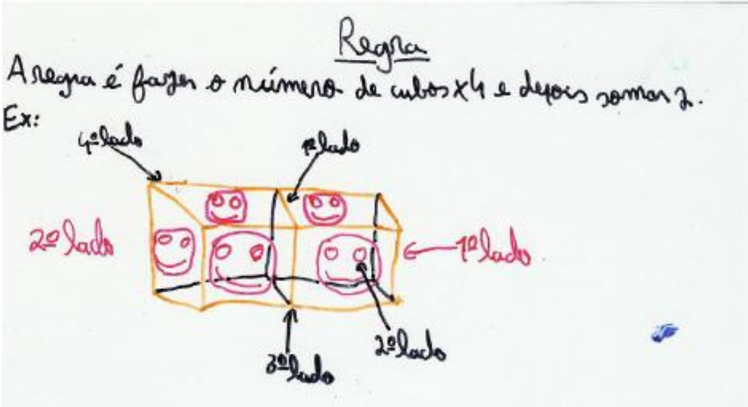


Figura 7.67 – Resolução do par Henrique e João P. (VI) da tarefa 41.

Também este par, na sua explicação à turma, recorre ao contexto da situação para clarificar e tornar compreensível a sua forma de representação.

> João P. – A regra é fazer o número de cubos vezes quatro e depois somar dois. Demos só um exemplo, usamos só dois cubos, depois desenhámos os dois cubos. Explicámos aqui este lado de cima, depois este da frente [que] é o segundo lado, depois o de baixo que é o terceiro lado e depois o de trás que é o quarto.
> Rita – Porque é que ali repetes duas vezes o primeiro e duas vezes o segundo?
> João P. – Então é o primeiro lado lateral e o segundo lado lateral, depois é só fazer o número de cubos vezes quatro e depois é só somar dois.

Em seguida, é a vez do par Carolina e Daniel (II) apresentar a sua resolução à turma (Figura 7.68). Este par também apresenta um nível de generalização global (G) e reconhece a relação funcional (F) entre as variáveis. Enuncia a regra em linguagem natural e simbolicamente, através de uma linguagem alfanumérica.

Na escrita simbólica da regra é interessante verificar a forma como este par utiliza as cores para atribuir diferentes significados ao mesmo símbolo. Inicialmente, estes alunos escrevem corretamente a regra $(4 \times n) + 2 = t$. Depois, apresentam o que parecem ser os procedimentos anteriores que conduzem à escrita dessa regra, revelando incorreções formais. No entanto, utilizam duas cores (vermelho e azul), às quais parecem atribuir uma significação particular. Inicialmente escrevem $4 \times n = n$, representando o primeiro n a azul e o segundo a vermelho, indicando, assim, tratar-se de números diferentes. Depois, escrevem $n + 2 = t$, escrevendo esse n a vermelho, ou seja, sendo este número equivalente à soma da operação anterior. Desta forma, o modo como utilizam diferentes cores para os n’s permite perceber que querem representar números diferentes: “$4 \times n$” será igual a determinada quantidade e essa mesma quantidade mais dois é que será igual ao número total de autocolantes. Naturalmente que o procedimento que apresentam não é correto, mas é interessante verificar como atribuem à cor esta significação simbólica.

Para além disto, este par apresenta uma tabela com duas colunas (número de cubos e número de autocolante), a qual completam com diferentes exemplos. Na exploração dessa tabela apresentam tanto uma leitura recursiva ao indicar a variação do número de autocolantes linha a linha, como uma leitura funcional que relaciona diretamente o número de cubos com o número de autocolantes e a indicação explícita da regra. Essa regra é, aliás, usada na determinação do número de autocolantes para cada número de cubos apresentado.

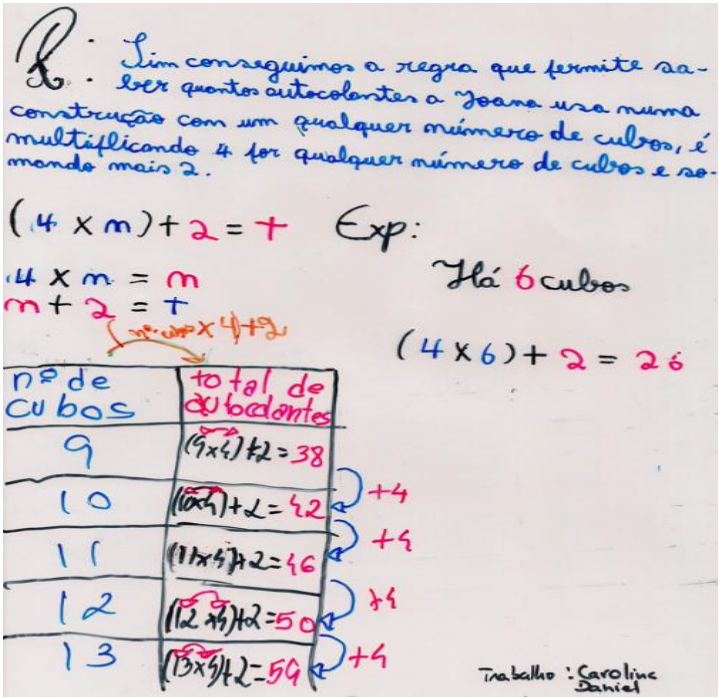


Figura 7.68 – Resolução do par Carolina e Daniel (II) da tarefa 41.

Na apresentação à turma, a investigadora solicita ao par que explique a tabela que construíram. Isso conduz a turma a uma discussão sobre a diferença entre o número de autocolantes nos termos consecutivos da sequência, e o valor constante que é adicionado.

> Carolina – Nós pensámos, como no outro dia o grupo do Fábio fez uma tabela, assim mais ou menos como esta, e então pensámos que também podíamos fazer uma. E

vimos a relação. Então fizemos duas colunas: uma com o número de cubos e outra com o total de autocolantes. O número de cubos é 9,10,11,12,13 e a relação é de um. No total de autocolantes a relação é de quatro. Aqui era de quatro, mas aqui estava sempre a fazer dois, também era de quatro.
Fábio – Essa parte não percebi.. era de dois e depois era de quatro?
Carolina – Sim, aqui era de quatro e aqui está sempre a ser dois...
Gonçalo – Não, simplesmente porque ali é vezes quatro...
Carolina – Sim, porque aqui está sempre dois, por isso é de quatro... se fizeres assim, sem o dois, assim nove vezes quatro é 36, e depois 10 vezes quatro dá 40, 42...
Gonçalo – Não, mas isso é só a tabuada do quatro. Nove vezes quatro era 36...
Rita – Vezes quatro é 36, juntando mais dois, como em todos junta mais dois, por isso é que dá mais quatro.
Gonçalo – Se tirares o mais dois é a tabuada do quatro.

Nesta altura, a investigadora procura que os alunos justifiquem o porquê das regularidades identificadas através da exploração da tabela. Conduz, nesse sentido, a discussão coletiva.

Investigadora – Porque é que é sempre mais quatro?
Fábio – Porque se faz sempre vezes quatro...
Investigadora – Mas porquê?
Carolina – Porque nove vezes quatro dá 36, depois com o dois, 38; 10 vezes quatro, 40, junta-se o dois, 42, é o dois que está a fazer isto...
Investigadora – O dois está a fazer isto. Mas porque é que tu dizes ali, vocês têm ali as setinhas, mais quatro, mas porquê mais quatro e não outra coisa qualquer?
Carolina – Porque a diferença é de quatro.
Investigadora – Mas porquê?
Rita – Porque foi assim, eles fizeram nove vezes quatro, é 36 e o 36 faz parte da tabuada do quatro, mas eles puseram mais dois, se eles no próximo metessem mais três já não seria mais quatro... porque é sempre o mesmo número.
Investigadora – Mas eles fizeram e fizeram corretamente... A minha pergunta é porque é que neste problema, nesta situação….
Rita – Porque há quatro lados nos cubos. (…)
João V. – Porque tem quatro lados.
Investigadora – O que é que tem quatro lados?
João V. – Sim, quatro faces.
Investigadora – Mas o cubo tem quatro faces?
Vários alunos – Não, tem seis...
João V. – Mas é menos uma que fica tapada e depois é menos a outra do outro que também fica tapada.

Em seguida, o grupo formado pelos alunos Rita, Diogo e Beatriz (IV) faz a apresentação da sua resolução à turma (Figura 7.69). Este grupo apresenta a escrita da regra em linguagem simbólica alfanumérica e em linguagem natural. Apresenta uma legenda onde discrimina o significado atribuído a cada variável na escrita simbólica da regra. Na representação em linguagem natural descreve o procedimento que efetua para calcular o número de autocolantes de uma qualquer construção de cubos, considerando o número de autocolantes da “face que está em cima”.

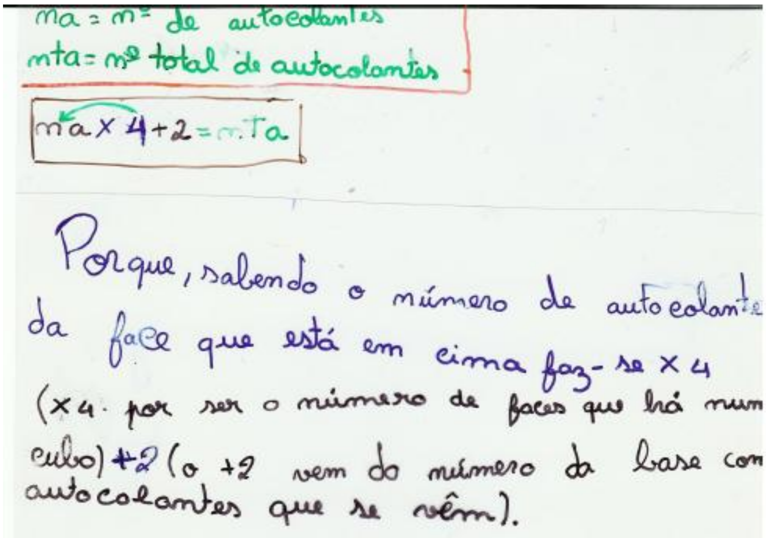


Figura 7.69 – Resolução do grupo Rita, Diogo e Beatriz (IV) da tarefa 41.

Na sua explicação à turma, este grupo mostra que considerou “o número de autocolantes da face que está em cima” como variável independente.

> Rita – Nós fizemos muito parecido com o grupo do João. Nós... tivemos que explicar porque é que na vezes quatro mais dois é igual a nta, que é o que o Diogo agora vai ler.
> Diogo – Porque sabendo o número de autocolantes da face que está em cima faz-se vezes quatro.
> Rita – Se soubermos o número de faces de cima é só multiplicar por quatro.
> Gonçalo – Mas não precisas de dizer que é em cima.
> João V. – Mas pode ser a que está de lado, ou em baixo...
> Rita – Sim, mas é a que está em cima.

Por usarem uma variável diferente da que foi apresentada pelos grupos anteriores, este facto suscitou uma discussão na turma, com alguns alunos a pronunciarem-se contra a opção do grupo ao considerar essa variável como independente.

> João V. – Número de autocolantes vezes quatro... número de autocolantes?! Assim já sabem o número de autocolantes. Tem de ser o número de cubos, é o número de cubos!
> Rita – Mas não é o número de autocolantes, é o número que está em cima.
> Gonçalo – Então, só há um.
> Rita – Não, pode haver dois cubos. Seria duas vezes quatro.
> João V. – É muito complicado porque o na era o número de autocolantes... isso quer dizer que já sabes o número de autocolantes...

Gonçalo – É a mesma coisa saber o número de autocolantes e fazer vezes quatro.
João V. – Mas assim já têm de saber o número de autocolantes.
Rita – Não, não sabemos nada. Por exemplo, temos este cubo, por exemplo, temos um autocolante em cima e faço vezes quatro, mas eu não sei o número total de autocolantes e depois é mais dois.
Carolina – Mas porque não pões o número de cubos? É mais fácil.
(...)
Investigadora – Eu gostava de saber o que a Matilde acha sobre este assunto.
Matilde – Eu acho que o que a Rita disse está certo. Eu percebi que ela estava a explicar que podia ser três ou quatro cubos, ou 100, pode ser um número qualquer de cubos, em cima tem os autocolantes, depois é fazer esses autocolantes vezes quatro mais dois.

A investigadora propõe, então, que se comparem diferentes representações, apresentando em simultâneo a resolução do grupo do André, Gonçalo e Joana (V) e do grupo da Rita, Diogo e Beatriz (IV) (Figura 7.70).

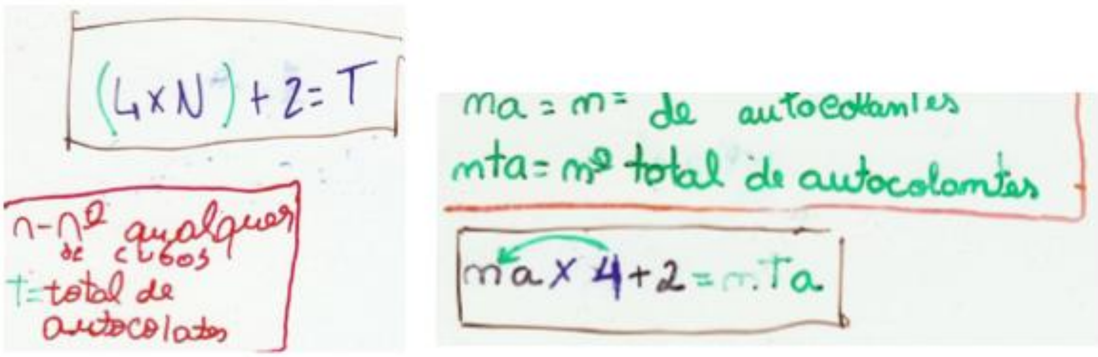


Figura 7.70 – Comparação entre as resoluções dos grupos V e IV da tarefa 41.

Embora a escrita da regra seja semelhante em ambos os grupos, o primeiro considera o número de cubos como a variável independente e o segundo considera ser o número de autocolantes essa variável.

Gonçalo – No nosso está a dizer que é um número qualquer de cubos e o dela é um número qualquer de autocolantes... Mas vai dar ao mesmo... Saber o número qualquer de autocolantes ou o número qualquer de cubos é a mesma coisa...
Investigadora – É?
Gonçalo – Então é assim: aqui há três cubos e os *smiles* de cima... então estes são os *smiles* de cima e são três cubos e três *smiles*. Tínhamos falado que os smiles é três vezes quatro, viste os *smiles* de cima, mas se souberes os três cubos também vai ser três vezes quatro.
Investigadora – Mas o número de autocolantes dessa construção é igual ao número de cubos?
Gonçalo – Não professora, mas só que a Rita estava a dizer que só contava os de cima, que era os de cima vezes quatro, então os de cima são três e há três cubos, então os três autocolantes de cima é a mesma coisa que os três cubos.

(...)
João V – É a mesma coisa.
Investigadora – É a mesma coisa... mas...
João V. – Só que explicado de maneiras diferentes...
Investigadora – É a mesma coisa, mas acho que temos de ter um cuidadinho aí...
Carolina – Eu acho que o da Rita e o do Gonçalo são a mesma coisa... porque se soubéssemos o número de autocolantes tínhamos de contar o número de cubos e se soubéssemos o número de cubos tínhamos de contar o número de autocolantes...
(...)
Investigadora – Agora eu acho que... há um cuidado quando nós usamos ali um número qualquer de autocolantes, acho que temos de ter um cuidado especial ali...
Gonçalo – Ali ela falou que era o de cima, mas se for o da frente também são três autocolantes e três cubos.
João V. – Tanto faz.
Investigadora – Ok, e se for o número total de autocolantes?... Não é também o número de autocolantes?
Vários alunos – É.
Investigadora – Então, o que falta dizer ali? Número de autocolantes...
João V. – E cubos.
Fábio – Não, número de autocolantes de cima.
Investigadora – De cima, de uma face... Porque senão eu posso...
João V. – Senão pode ser qualquer face do cubo e não só a de cima...

Em seguida, a investigadora propõe ao grupo do Fábio, António e Marco (III) que façam a sua apresentação à turma, uma vez que estes alunos reconheceram a relação entre o número de cubos e o número de autocolantes de forma diferente dos restantes grupos (Figura 7.71). Estes alunos também reconheceram a relação funcional (F) e evidenciaram um nível global de generalização (G), apresentaram uma regra geral equivalente à apresentada pelos restantes colegas. Estes alunos começaram por considerar os cinco autocolantes de cada um dos “cubos das pontas” e os quatro autocolantes dos restantes cubos. Na sua resolução escrita apresentam o percurso que fizeram utilizando esse raciocínio para construções com dois, três, quatro e cinco cubos até identificarem uma regularidade que lhes permitiu enunciar uma regra da relação para qualquer número de cubos. Aplicam essa regra para construções com 10 e 52 cubos e escrevem-na na sua forma geral.

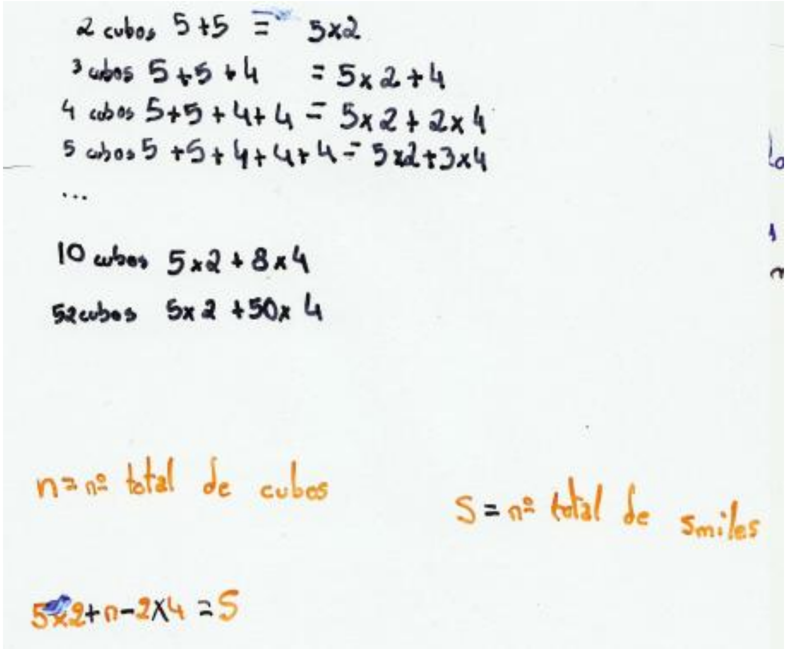


Figura 7.71 – Resolução do grupo Fábio, António e Marco (III) da tarefa 41.

Fábio – Então, nós ali.. estão ali dois cubos, quase todas as pessoas pensaram que é sempre o quatro vezes o dois, quatro vezes o dois e depois mais estas dois e nós pensámos em fazer cinco vezes oito, porque num quadrado [cubo] havia cinco e depois no outro havia cinco, então fizemos cinco vezes dois que dá 10.
João V. – Eu já percebi! É a mesma coisa feita de maneira diferente.
Fábio – Sim, e depois ali cinco mais cinco era como se nós estivéssemos a repartir, estivesse um cubo com cinco autocolantes e aqui outro com cinco e depois aquilo era igual a cinco vezes dois.
(...)
Gonçalo – Só que depois com três cubos já tinhas de mudar a estratégia...
Rita – Fábio, eu não estou a perceber muito bem aquela coisa que está cinco vezes dois mais três vezes quatro...

Como alguns colegas manifestavam não estarem a entender a resolução apresentada por este grupo, a investigadora solicita a Fábio que explique devagar e use os modelos dos cubos de madeira para ilustrar a sua estratégia de resolução do grupo. Fábio começou por explicar a regra para uma construção com dois cubos, e continuou a sua explicação aplicando a regra a construções com um número crescente de cubos: três, quatro e cinco. Em seguida, a investigadora solicitou que o fizesse para uma construção com 10 cubos.

Fábio – Então... nós temos aqui 10 cubos e depois dividimos as duas pontas, tinham quatro e depois as do meio que eram oito que tinham quatro [autocolantes], depois era o cinco vezes o dois, mais oito vezes o quatro, que são oito do meio com quatro autocolantes.
Investigadora – Como é que tu sabias que eram oito do meio?
Fábio – Porque no meio temos sempre menos dois cubos do que no total.

Investigadora – Porque é que temos sempre menos dois cubos?
Fábio – Porque tirámos os das duas pontas, que têm cinco.

Nesta altura, a investigadora solicita a Fábio que explique como descobriu uma regra geral para essa relação. Fábio explica a regra enunciada na folha de resolução do grupo. Nesse momento, um aluno, Daniel, sugere a utilização de parêntesis na escrita da regra. Desta forma, no coletivo, vários alunos contribuem para que a escrita da regra seja melhorada.

Fábio – Então o n é igual ao "número total de cubos" e o s é o número total de *smiles*, então fazemos cinco vezes dois...
Investigadora – Podes usar aquele [exemplo] do 10 ou do 52...
Fábio – Cinco vezes dois, mais 50 vezes 4 que é tirar dos 52, dois, aqueles ali é 52 mais n menos dois que é o número total de cubos menos dois que ia dar, por exemplo, 50 vezes quatro, que ia dar o número total de autocolantes.
Matilde – Eu percebi!
João V. – Eu percebi!
Daniel – Eles não deveriam ter metido parêntesis antes do cinco vezes dois? Por exemplo, no terceiro...
João V. - Não era preciso, dava para perceber.
Matilde – Cinco vezes dois mais cinco vezes quatro...
(...)
Investigadora – Podiam ter posto... ali, naquele caso específico, não é mesmo, mesmo muito importante, agora aqui nesta regra... Vejam lá se não falta ali qualquer coisa... Portanto, a regra que o grupo do Fábio escreveu foi "Cinco vezes dois mais n menos dois vezes quatro é igual aos *smiles*. Aqui, será que não falta aqui qualquer coisa?
António – Parêntesis.
Investigadora – Onde?
Vários alunos – No cinco vezes dois.
João V. – Não, no n menos dois...
Investigadora – Porquê?
Gonçalo – É no n menos dois vezes quatro.
João V. – É o resultado do n menos dois vezes quatro.

Fábio reescreve a regra, ficando "$5 \times 2 + (n - 2) \times 4$". A investigadora refere à turma que esta resolução foi importante para perceberem que não existe apenas uma forma para descrever a relação entre o número de autocolantes e o número de cubos.

7.4.4 Síntese

As tarefas da quinta sequência apresentadas exploravam sequências pictóricas e enquadravam-se em contextos de promoção do pensamento funcional. Tinham como objetivo principal o reconhecimento das relações funcionais e a sua generalização.

Relativamente ao nível de pensamento funcional evidenciado pelos alunos pode constatar-se que, apenas na primeira tarefa, alguns pares de alunos (apenas dois em nove) identificaram recursivamente as relações entre as variáveis. Os restantes pares reconheceram a relação direta entre a variável independente e a variável dependente, indicando uma regra geral da correspondência entre ambas. Nas restantes tarefas apresentadas nesta sequência, todos os pares reconheceram essa relação direta entre as variáveis, enunciando a relação funcional de forma bastante clara.

Relativamente ao nível de generalização, apenas na primeira tarefa houve alguma evidência de níveis menos abrangentes, com quatro pares a apresentarem uma generalização de nível factual. Estes pares, embora reconhecendo a relação funcional, não a conseguiram enunciar nomeando a indeterminação. Na primeira parte da segunda tarefa, apenas um par apresentou um nível de generalização inferior ao nível global, enunciando a generalização da relação através da descrição do contexto da tarefa (nível de generalização contextual). Os restantes oito pares enunciaram a generalização da relação de forma global. Na segunda parte desta tarefa, sete pares apresentaram um nível de generalização de nível contextual e os restantes um nível global. Na terceira tarefa todos os sete pares evidenciaram um nível de generalização global.

Relacionando o nível de pensamento funcional com o nível de generalização evidenciados pelos alunos, constata-se que, na primeira tarefa, os dois pares de alunos que reconheceram recursivamente a relação apenas apresentaram um nível factual de generalização. Os restantes pares que conseguiram reconhecer a relação funcional apresentaram níveis de generalização factuais ou globais. Tendo em conta que o nível de pensamento funcional foi crescente nas tarefas seguintes, também o nível de generalização apresentado se centrou nos níveis superiores de generalização. Assim, na segunda tarefa, a maior parte dos pares apresentou níveis de generalização e de pensamento funcional superiores e na terceira tarefa todos os alunos evidenciaram o reconhecimento da relação funcional num nível global de generalização.

Os tipos de representação utilizados pelos alunos nas tarefas desta sequência foram diversos. A linguagem natural esteve presente na maior parte das resoluções dos pares, em todas as tarefas. Em simultâneo, surgiram representações como desenhos e tabelas. A linguagem pré-simbólica, sincopada, surgiu na primeira tarefa, em dois pares. A linguagem simbólica alfanumérica foi uma forma de representação com uma presença crescente ao longo destas tarefas. Na primeira tarefa, apenas dois pares usaram a linguagem alfanumérica e esse número foi aumentando ao longo das outras tarefas, com seis dos oito pares a usá-la na primeira parte da segunda tarefa e cinco dos sete pares a usá-la na última tarefa.

Tendo em conta estes resultados, importa atender às características das tarefas exploradas. Todas as tarefas desta sequência incluíam sequências pictóricas crescentes que parecem ter facilitado a identificação da relação entre as variáveis. O contexto pictórico visual permitiu atribuir sentido às diferentes variáveis e tornar mais explícitas as relações entre elas. As duas últimas tarefas apresentavam ainda a utilização de um número constante nas sequências, o que permitiu uma maior clarificação na compreensão do conceito de variável, distinguindo o que é constante na regra e o que varia. É de salientar que a terceira tarefa, ainda que com um maior grau de complexidade por exigir uma visualização tridimensional, foi facilmente resolvida pelos alunos com recurso aos materiais concretos utilizados. A importância dos contextos das tarefas é constatada mesmo quando os alunos já não usam a descrição destes na explicitação das regras gerais que constroem, mas recorrem a eles para tornar mais compreensíveis as suas resoluções quando as explicam à turma.

No que concerne à exploração das tarefas em sala de aula e, mais concretamente, aos momentos de discussão coletiva, o percurso efetuado ao longo desta sequência foi promotor da construção de importantes conceitos relativos à compreensão da variação, da relação entre variáveis e da sua representação. Desta forma, partindo das resoluções dos grupos, a sua discussão permitiu, nuns casos, a reformulação das representações utilizadas, e, noutros casos, a clarificação de aspetos pertinentes para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Assim, foram discutidos conceitos relativos à conceção das variáveis, à distinção entre as variáveis dependentes e independentes e à clarificação do uso de símbolos para as representar. Essas discussões parecem ter sido promotoras de um maior desenvolvimento da construção do sentido de símbolo por parte dos alunos. Verifica-se, ainda, uma crescente participação de alguns alunos que usam as discussões coletivas de forma ativa para expressar os seus raciocínios ou pedir esclarecimentos aos colegas.

Capítulo 8 – Conclusões

O objetivo deste estudo é compreender como se desenvolve a capacidade de generalização dos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade, no decurso de uma experiência de ensino implementada durante o ano letivo de 2010/11, ancorada numa perspetiva de desenvolvimento do pensamento algébrico. Por um lado, procura-se compreender como se caracteriza e evoluiu a capacidade de generalização dos alunos ao longo da experiência de ensino. Por outro lado, procura-se refletir sobre a conjetura de ensino-aprendizagem formulada, na sua dupla vertente de conteúdo e pedagógica, e como a mesma contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

De acordo com o objetivo enunciado, foram definidas as seguintes questões de investigação:

1. Ao longo da experiência de ensino, como evoluiu:
   a) a capacidade de generalização dos alunos em contextos de promoção do pensamento relacional?
   b) a capacidade de generalização dos alunos em contextos de promoção do pensamento funcional?
   c) a capacidade de representação da generalização dos alunos?
2. Como a experiência de ensino contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos?

Para responder a estas questões e atingir o objetivo referido, apresento neste capítulo uma primeira secção onde se sistematizam os resultados evidenciados no capítulo 7, tendo em conta os seguintes temas organizadores para a compreensão do desenvolvimento da capacidade de generalização dos alunos: contextos de promoção do pensamento relacional, contextos de promoção do pensamento funcional e tipos de representação. Estes temas organizadores definem-se nas duas dimensões da conjetura (de conteúdo e pedagógica) que orientou a experiência de ensino, permitindo a resposta às questões do estudo formuladas. Na segunda secção deste capítulo são apresentadas as respostas às questões de estudo, de forma sistemática, cruzando os resultados obtidos com referências teóricas importantes. Na última secção deste capítulo são discutidas algumas contribuições e limitações do estudo.

8.1. Sistematização dos resultados

Tendo em conta o objetivo deste estudo, e de forma a poder responder às questões que orientaram esta investigação (Secção 8.2), apresenta-se, em seguida, uma sistematização dos resultados apresentados no capítulo 7. Esta sistematização é apresentada tendo em conta os seguintes temas organizadores: a capacidade de generalização em contextos de promoção do pensamento relacional; a capacidade de generalização em contextos de promoção do pensamento funcional; e, a capacidade de representação da generalização.

8.1.1. A capacidade de generalização em contextos de promoção do pensamento relacional

Para caracterizar a capacidade de generalização em contextos de promoção do pensamento relacional importa fazer uma leitura longitudinal do desempenho dos alunos em todas as tarefas analisadas com esse tipo de contexto. Essas tarefas enquadram-se nas sequências II, III e IV e, em todas, foram exploradas relações numéricas em casos particulares com o objetivo da sua identificação e posterior generalização para além dos casos apresentados.

Importa assim perceber como os alunos reconheceram relacionalmente as relações numéricas envolvidas nas diferentes tarefas analisadas com contextos focados no pensamento relacional (Figura 8.1)[6].

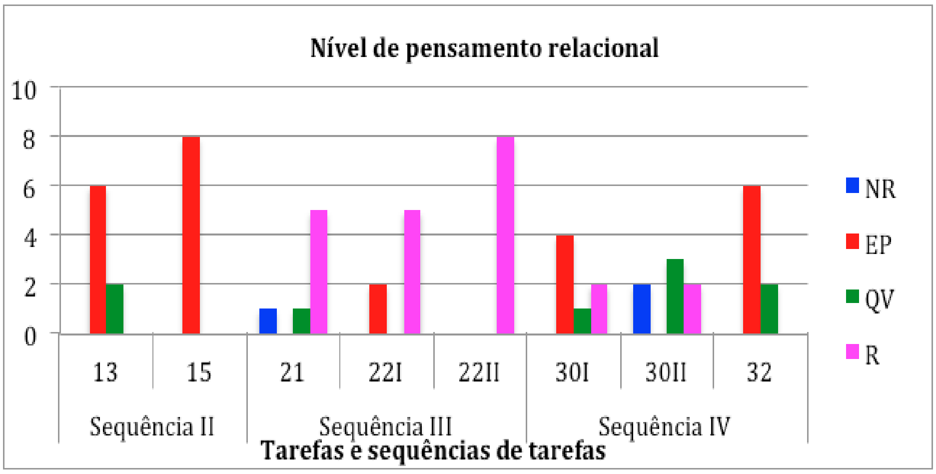


Figura 8.1 – Nível de pensamento relacional evidenciado pelos pares/grupos de alunos nas tarefas analisadas das sequências II, III e IV.

[6] O número de pares/grupos de alunos na turma variou entre 7 e 9 ao longo da experiência de ensino.

Constata-se que, de forma geral, nas tarefas analisadas das três sequências, os níveis de pensamento relacional mais apresentados pelos alunos foram os de “utilização de exemplos particulares” e “relacional”. Nas tarefas analisadas da segunda sequência, os alunos apenas apresentaram níveis de pensamento relacional centrados em “exemplos particulares” e através da “utilização de quase variáveis”. As tarefas analisadas na terceira sequência foram as que mais mobilizaram o nível de pensamento relacional, sendo este apresentado pela maioria dos pares/grupos de alunos nas duas tarefas. Nas tarefas analisadas na quarta sequência os níveis de pensamento relacional mobilizados pelos alunos foram diversos, mas com maior incidência no nível de “utilização de exemplos particulares” e, em número ligeiramente inferior, o nível de “utilização de quase-variáveis”. Desta forma, constata-se que os alunos apresentaram um nível superior de pensamento relacional nas tarefas analisadas da terceira sequência.

Relativamente ao nível de generalização evidenciado pelos alunos nas tarefas analisadas das três sequências referidas, constata-se que os níveis de generalização com mais expressão foram o aritmético e, em valores muito próximos, o contextual e o global (Figura 8.2). Nas tarefas analisadas da segunda sequência, apenas na primeira tarefa os alunos evidenciaram um nível de generalização identificado como aritmético, pois, na segunda tarefa não evidenciaram qualquer nível de generalização. Na terceira sequência, os níveis de generalização nas tarefas analisadas foram maioritariamente contextuais, embora um número considerável de evidencias da generalização global se tenha registado na última tarefa. Nas tarefas analisadas da quarta sequência, os níveis de generalização foram de sofisticação inferior relativamente aos apresentados nas tarefas analisadas da sequência anterior. Nestas tarefas da quarta sequência, os níveis de generalização foram maioritariamente aritméticos. De forma geral, nas sequências de tarefas que trabalhavam o pensamento relacional, os níveis de generalização evidenciados pelos alunos nas tarefas analisadas foram maioritariamente aritméticos, embora com uma expressão significativa de níveis de generalização contextual e global, evidenciados particularmente nas tarefas da terceira sequência.

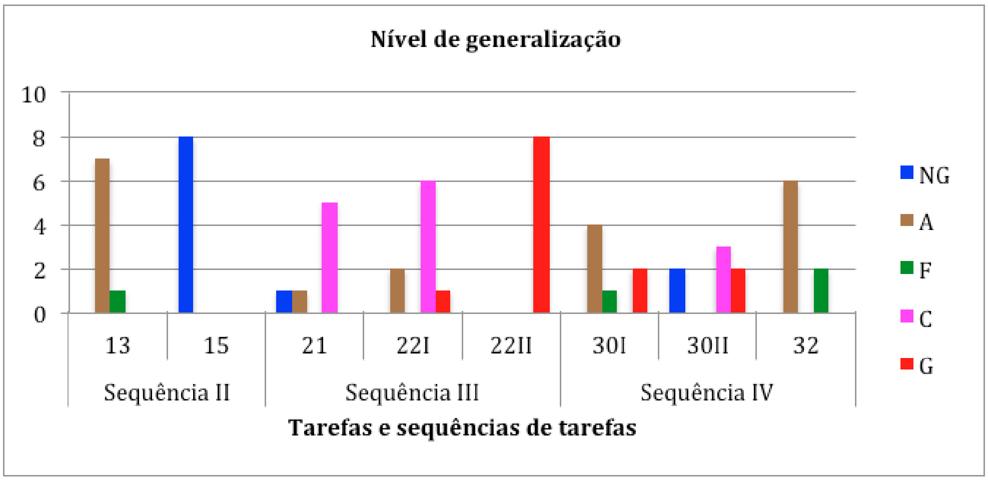


Figura 8.2 – Nível de generalização evidenciado pelos pares/grupos de alunos nas tarefas analisadas das sequências II, III e IV.

Importa agora atender às características das tarefas analisadas das três sequências referidas. Nas tarefas analisadas da segunda sequência, a primeira apresentava diferentes exemplos da estratégia de cálculo e a segunda apenas um exemplo. Como se constata pelos níveis de pensamento relacional e de generalização evidenciados, a primeira tarefa parece ter sido mais promotora da expressão da generalização do que a segunda. A primeira tarefa analisada da terceira sequência, embora introduzisse símbolos alfanuméricos, apresentava um contexto de modelação que parece ter sido facilitador para a apreensão e compreensão das relações numéricas exploradas. As tarefas analisadas da quarta sequência apresentavam contextos marcadamente numéricos, centrados em casos particulares, e esse facto parece ter provocado dificuldades na apreensão da generalidade das relações numéricas pelos alunos. Nessas tarefas, particularmente a trigésima segunda, o nível de exigência era consideravelmente superior às restantes, e os alunos centraram-se nos casos particulares das relações consideradas, não conseguindo nomear a indeterminação, mesmo nos poucos casos em que evidenciaram um nível de generalização algébrica (factual). Constata-se, assim, uma estreita relação entre as características das tarefas e o desempenho dos alunos, no que respeita à apreensão das relações numéricas e da generalização. Assim, tarefas que apresentavam mais do que um caso particular ou um contexto de modelação facilitador da compreensão das relações numéricas promoveram nos alunos um maior reconhecimento dessas relações e uma maior capacidade de expressão da generalização.

Assim, no que concerne ao nível de pensamento relacional evidenciado pelos alunos, há a destacar o seguinte:

1. A exploração de exemplos particulares das relações numéricas foi a primeira abordagem dos alunos às tarefas analisadas relativas ao desenvolvimento do pensamento relacional.
2. Em algumas tarefas, nomeadamente na segunda e quarta sequência, os alunos conseguiram aplicar os casos particulares a outros semelhantes, usando o sentido de quase-variável (Fujii, 2003).
3. Nas tarefas da terceira sequência foi mais evidente o reconhecimento das relações numéricas independentemente dos casos particulares, evidenciando a apreensão de um nível relacional das mesmas.
4. Os contextos marcadamente numéricos das tarefas analisadas na quarta sequência, centrados em casos particulares, conduziram, de novo, à exploração dos casos particulares e dificultaram a apreensão do nível relacional.
5. As características de determinadas tarefas, como o facto de apresentarem diferentes possibilidades de variação das relações numéricas ou um contexto de modelação propício à compreensão das mesmas, conduziram a níveis de pensamento relacional mais sofisticados.

Relativamente ao nível de generalização evidenciado pelos alunos, podemos sistematizar o seguinte:

1. Os primeiros níveis de generalização evidenciados pelos alunos foram aritméticos, reconhecendo a comunalidade apenas nos casos apresentados e sem estender a relação para quantidades indeterminadas. Estes níveis de generalização foram mais evidentes nas tarefas analisadas da segunda sequência.
2. Nas tarefas analisadas da terceira sequência, e possivelmente sugestionados pelo contexto rico de modelação apresentado na primeira dessas tarefas, os alunos começaram a evidenciar níveis de generalização algébricos, marcadamente contextuais. Desta forma, conseguiram estender a relação para quantidades indeterminadas, definindo uma regra que envolvia a descrição do contexto da situação. Na última tarefa analisada desta sequência surgiram também, de forma bastante evidente, os primeiros níveis de generalização globais, onde a regra definida já não se apoiava na descrição do contexto da situação. Esta tarefa, embora de continuidade com a primeira desta sequência, já não apresentava um contexto de modelação no seu enunciado.
3. Nas tarefas analisadas da quarta sequência, o contexto marcadamente numérico e a complexidade das relações numéricas, dificultaram a nomeação explícita da

indeterminação, impedindo consequentemente a apreensão de um nível de generalização superior.

4. As características de determinadas tarefas, como o facto de apresentarem diferentes possibilidades da variação das relações numéricas ou um contexto de modelação propício à compreensão das mesmas, permitiram a nomeação da indeterminação, conduzindo a níveis de generalização mais sofisticados.

Interessa agora relacionar os níveis de pensamento relacional com os níveis de generalização evidenciados pelos pares/grupos de alunos nas tarefas analisadas das três sequências referidas.

Quadro 8.1 – Relação entre o nível de generalização e o nível de pensamento relacional evidenciados pelos pares/grupos de alunos nas tarefas analisadas das sequências II, III e IV.

		Nível de generalização				
		NG	A	F	C	G
Nível de pensamento relacional	NR	3				
	EP	8	18			
	QV		2	4	3	
	R				11	13

Pela análise do Quadro 8.1 constata-se que a apreensão do nível relacional conduziu sempre a um nível de generalização superior, seja contextual ou global. O nível de pensamento relacional centrado na utilização de quase-variáveis conduziu a níveis de generalização maioritariamente algébricos (factual e contextual), embora também apresentasse casos de generalização aritmética. A utilização de exemplos particulares conduziu maioritariamente ao nível de generalização aritmética. E, naturalmente, os casos em que os alunos não reconheceram as relações numéricas e/ou propriedades das operações não conduziram à apreensão da comunalidade, evidenciando um nível de não generalização.

Desta forma, podemos constatar que os níveis de generalização evidenciados pelos alunos foram diversos, desde níveis de não generalização a níveis de generalização algébrica global. Esses níveis de generalização parecem ter sido influenciados por dois fatores: as características das tarefas e os níveis de pensamento relacional apreendidos. Assim, relativamente ao primeiro facto, constatou-se que as tarefas que apresentavam diferentes possibilidades de variação da relação numérica ou um contexto de modelação rico para a compreensão das mesmas, conduziram os alunos a níveis de pensamento relacional e de generalização mais sofisticados. No que concerne ao segundo facto, constatou-se que níveis de pensamento relacional mais sofisticados conduziram a níveis de generalização superiores.

No entanto, a análise conduzida neste estudo centrou-se ainda na dimensão pedagógica da conjetura, ao considerar a metodologia de exploração das tarefas em sala de aula como um aspeto central para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Neste sentido, importa não só considerar o que os alunos realizaram nos momentos de trabalho autónomo (a pares ou em pequenos grupos), mas também como emergiu o pensamento relacional e a generalização nas discussões coletivas realizadas em aula.

Nas tarefas analisadas das sequências II, III e IV, relativas à promoção do pensamento relacional, as discussões coletivas tiveram como eixo orientador comum a exploração de casos particulares e sua progressiva abordagem a outros casos, através do sentido de quase-variável, até à identificação e generalização das relações numéricas. Habitualmente, as discussões coletivas conduziram os alunos a níveis de pensamento relacional e de generalização superiores aos apresentados nos momentos de trabalho autónomo. A Figura 8.3 esquematiza, de forma sumária, essa linha orientadora da orquestração das discussões coletivas realizadas em aula.

A linha orientadora da orquestração das discussões coletivas pode ser caracterizada pelas seguintes etapas: 1) exploração dos casos particulares apresentados nos enunciados das tarefas, 2) extensão para outros casos particulares que evidenciavam a mesma relação numérica e, 3) generalização das relações numéricas. De acordo com as resoluções dos alunos do momento de trabalho autónomo e da seleção, por parte da investigadora, daquelas que seriam apresentadas no momento de discussão coletiva, nestas três etapas foram explorados diferentes níveis de generalização e de pensamento relacional. Assim, no que concerne ao pensamento relacional, as relações numéricas foram exploradas, de início, a partir dos casos particulares e, posteriormente, através da sua extensão para outros casos particulares, revelando o sentido de quase-variável. A generalização dessas relações numéricas surgiu, num nível inicial, dentro do contexto da situação descrita e, posteriormente, para além desse contexto, evidenciando a sua generalidade. No que respeita ao nível de generalização, esta foi trabalhada a partir do nível aritmético até ao algébrico, evoluindo para níveis mais sofisticados.

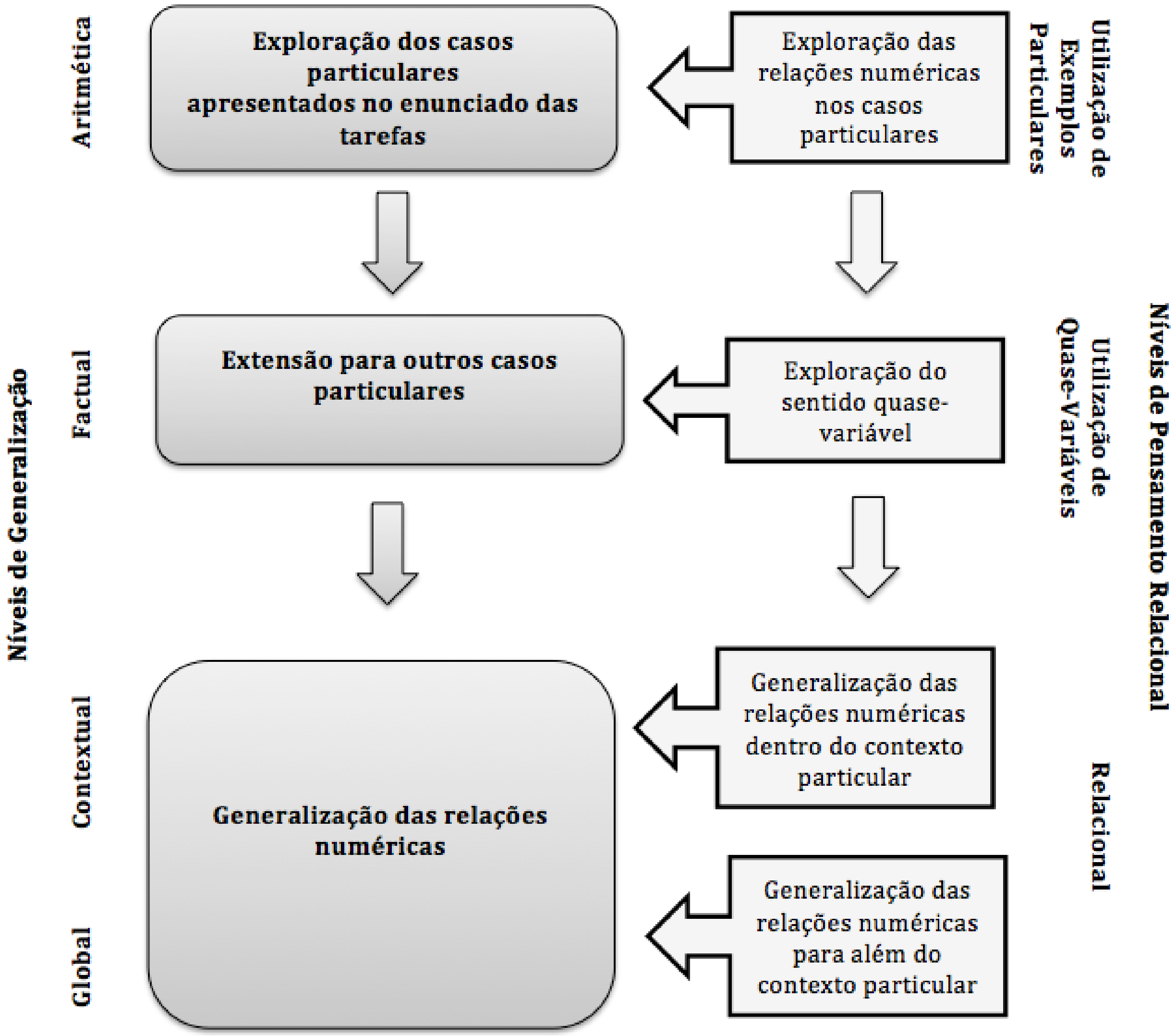


Figura 8.3 – Linha orientadora da orquestração das discussões coletivas, nos contextos de promoção do pensamento relacional.

Embora este seja um esquema orientador da exploração em sala de aula das tarefas, ao nível da discussão coletiva nem sempre essa exploração seguiu este nível sequencial para todas as tarefas. Desta forma, dependendo das evidências do trabalho autónomo dos pares/grupos de alunos, assim foram respeitadas todas ou apenas algumas etapas do processo descrito. A Figura 8.4 apresenta dois exemplos da forma como decorreu a discussão coletiva em duas tarefas distintas (tarefas 13 e 32), nas primeiras etapas a partir da apresentação das resoluções dos alunos e na etapa final pela introdução pela investigadora de níveis de pensamento relacional e tipos de representação mais sofisticados.

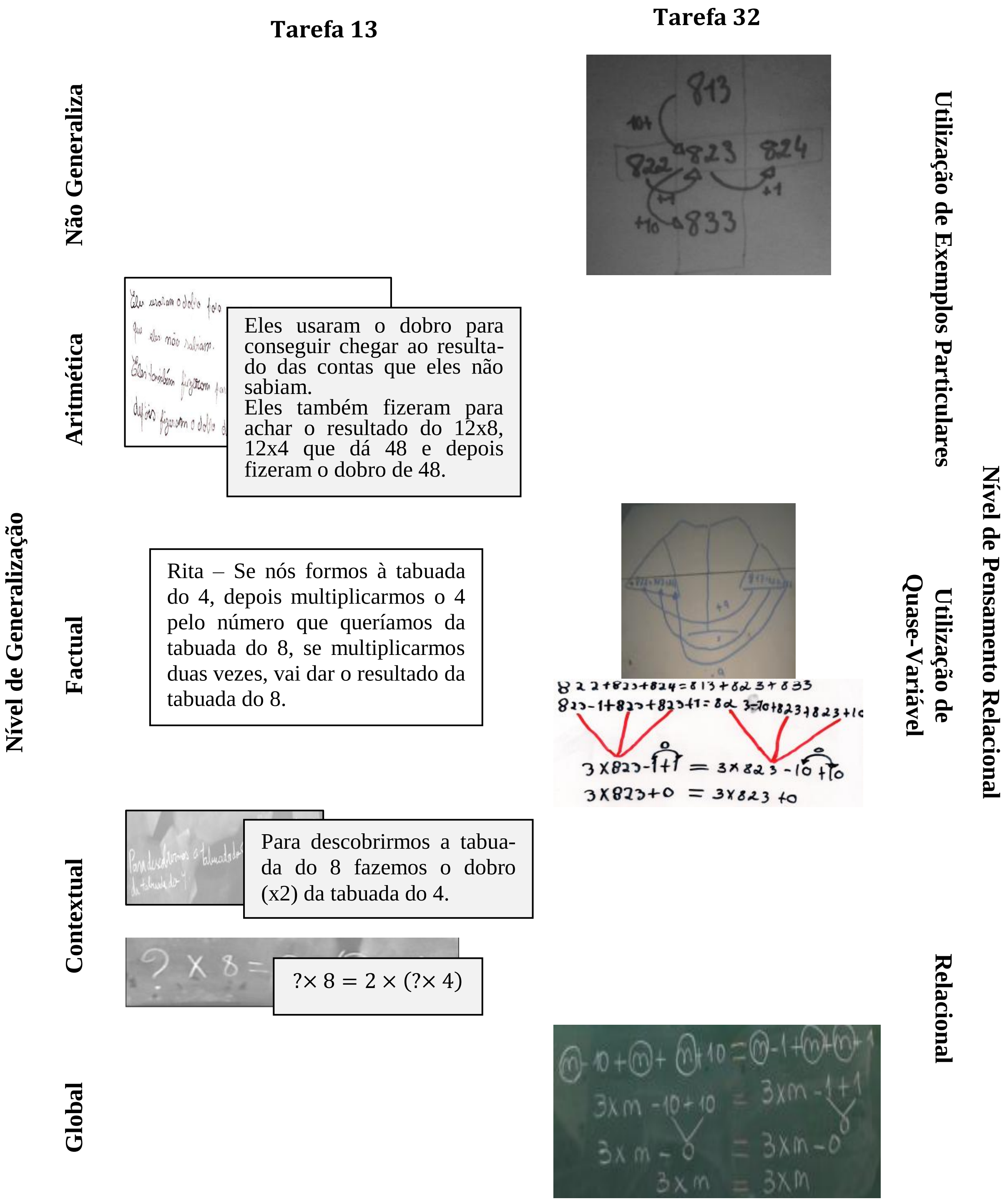


Figura 8.4 – Concretização da linha orientadora da orquestração das discussões coletivas em duas tarefas com contextos de promoção do pensamento relacional.

Como é apresentado na Figura 8.4, a discussão coletiva na tarefa 13 seguiu a exploração dos diferentes níveis de generalização, desde o aritmético ao contextual, e também diferentes níveis de exploração do pensamento relacional. Na tarefa 32 não foram abordados todos os níveis de generalização ou de pensamento relacional, ainda assim, a exploração coletiva, embora partindo de níveis de generalização menos sofisticados (por terem sido estes os concretizados pelos alunos no trabalho autónomo), atingiu a exploração de um nível de generalização superior, o global. Em ambas as tarefas a exploração da discussão coletiva foi conduzida pela investigadora no sentido da progressão tanto do nível de pensamento relacional como do nível de generalização.

8.1.2. A capacidade de generalização em contextos de promoção do pensamento funcional

Para caracterizar a capacidade de generalização em contextos de promoção do pensamento funcional, centramo-nos na leitura longitudinal do desempenho dos alunos nas tarefas analisadas da quinta sequência. Estas tarefas exploravam aspetos relacionados com o pensamento funcional, apresentando sequências pictóricas crescentes, envolvendo uma relação de dependência entre variáveis.

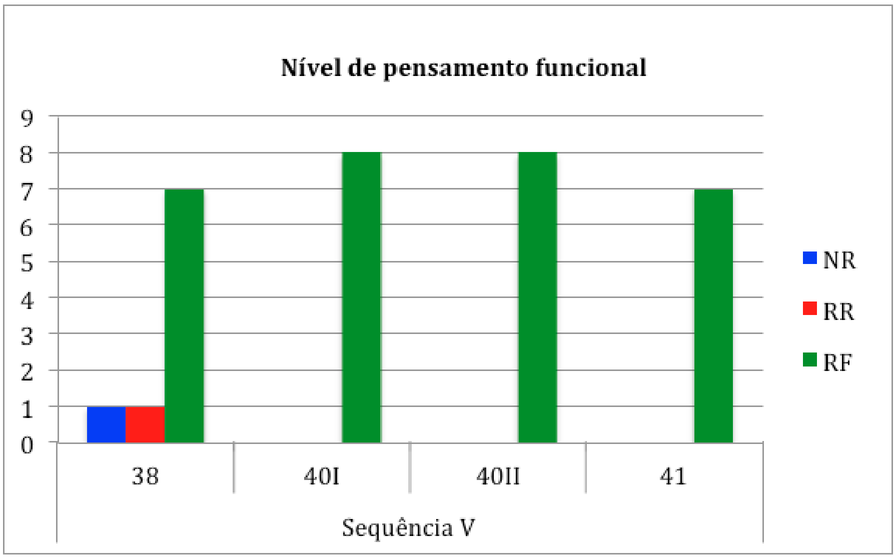


Figura 8.5 – Nível de pensamento funcional evidenciado pelos pares/grupos de alunos nas tarefas analisadas da sequência V.

Nas tarefas analisadas da quinta sequência, os alunos conseguiram, de forma geral, reconhecer as relações funcionais apresentadas (Figura 8.5). Apenas na primeira tarefa analisada, dois grupos de alunos não evidenciaram um nível de pensamento funcional, sendo que um deles não reconheceu a relação entre as variáveis e outro reconheceu a relação recursivamente.

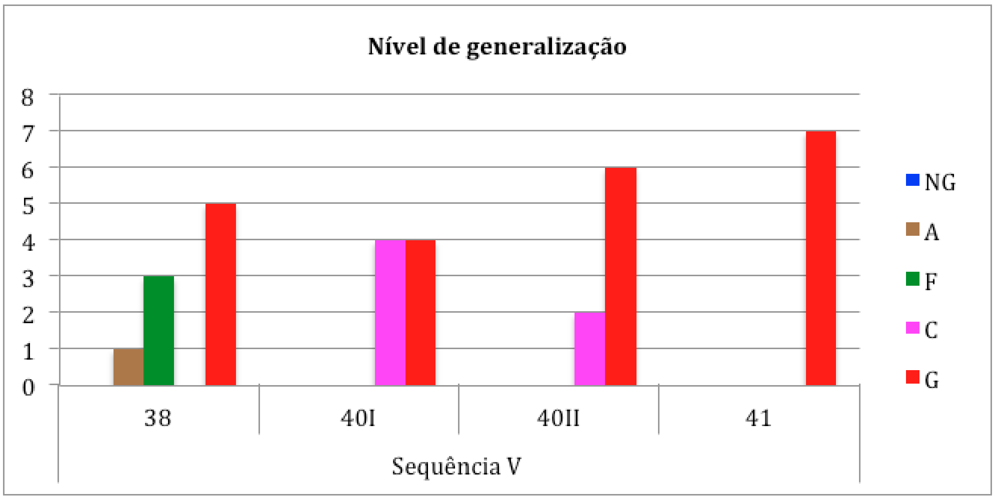


Figura 8.6 – Nível de pensamento funcional evidenciado pelos pares/grupos de alunos nas tarefas analisadas da sequência V.

O nível de generalização mais evidenciado pelos alunos nas tarefas analisadas da quinta sequência foi o global (Figura 8.6). Apenas na primeira das tarefas analisadas foram apresentados níveis de generalização inferiores: um caso de generalização aritmética e três de generalização algébrica de nível factual. A segunda tarefa analisada apresentou ainda casos de generalização contextual, mas na última tarefa todos os grupos de alunos apresentaram um nível de generalização global.

As tarefas analisadas na quinta sequência exploravam sequências pictóricas crescentes envolvendo uma relação de dependência entre variáveis. O contexto visual das sequências presentes nestas tarefas parece ter sido facilitador para o reconhecimento das variáveis envolvidas e da relação entre elas. Estes contextos visuais foram importantes para a compreensão das relações funcionais, mesmo quando envolviam valores constantes ou visualizações tridimensionais. Assim, enquanto que a primeira tarefa analisada da quinta sequência explorava uma sequência linear, cujo valor da variável independente correspondia ao número de ordem na sequência, na segunda tarefa analisada isso não acontecia, incluindo esta ainda um valor constante. Tal situação verifica-se também na última tarefa analisada, implicando a apreensão do que se mantinha constante e do que variava ao longo da sequência. Para além disso, esta última tarefa apresentava também uma construção tridimensional e, desta forma, revestia-se de uma maior complexidade no que respeita às capacidades de visualização exigidas aos alunos. Na exploração desta última tarefa os alunos utilizaram material concreto para a sua modelação e, talvez devido também a esse facto, foi a tarefa onde mais facilmente reconheceram a relação funcional. De forma geral, a importância dos contextos das tarefas foi bastante relevante para os resultados alcançados, verificando-se que, mesmo quando os alunos já não usavam o contexto na suas resoluções escritas, apoiavam-se nele nos momentos de discussão coletiva quando descreviam as suas resoluções aos colegas.

Assim, no que diz respeito ao nível de pensamento funcional evidenciado pelos alunos, há a destacar o seguinte:

1. A exploração de sequências pictóricas crescentes não parece ter suscitado dificuldades nos alunos, evidenciando-se uma certa facilidade na identificação das relações funcionais subjacentes.
2. Apenas na primeira das tarefas analisadas foram apresentados níveis de pensamento funcional de sofisticação inferior e em apenas dois pares/grupos de alunos (um nível não relacional e outro da perceção de uma relação recursiva).
3. Os contextos pictóricos parecem ter contribuído para a identificação explícita das variáveis e para o reconhecimento da relação de dependência entre elas. Os contextos destas tarefas foram, assim, promotores da compreensão das relações funcionais apresentadas.

Relativamente ao nível de generalização evidenciado pelos alunos, podemos constatar o seguinte:

1. Apenas na primeira tarefa analisada surgiu um nível de generalização aritmética, implicando que um dos pares/grupos de alunos apenas apreendeu a comunalidade entre os termos da sequência apresentados, não a estendendo para além desses termos.
2. Também apenas na primeira tarefa analisada surgiu um nível de generalização factual, com três pares/grupos de alunos a não conseguirem nomear a indeterminação.
3. Nas restantes duas tarefas analisadas os níveis de generalização foram de nível superior, com maior incidência no nível global. Desta forma, progressivamente, os alunos foram abandonando os contextos das tarefas para traduzirem regras gerais. Este facto é particularmente evidente na última das tarefas analisadas onde apenas se registaram níveis de generalização dessa natureza.
4. Os contextos das tarefas parecem também ter sido promotores da nomeação da indeterminação, conduzindo à definição de regras gerais e possibilitando, assim, níveis de generalização mais sofisticados.

Importa agora relacionar os níveis de pensamento funcional com os níveis de generalização apresentados pelos pares/grupos de alunos nas tarefas analisadas da quinta sequência (Quadro 8.2).

Quadro 8.2 – Relação entre o nível de generalização e o nível de pensamento funcional evidenciados pelos pares/grupos de alunos nas tarefas analisadas da sequência V.

		Nível de generalização				
		NG	A	F	C	G
Nível de pensamento funcional	NR		1			
	RR			1		
	RF			2	6	22

Podemos, então, constatar que a apreensão da relação funcional conduziu sempre a níveis de generalização algébrica, maioritariamente de nível global. Nos dois casos em que os alunos não reconheceram a relação funcional, os níveis de generalização foram, de facto, de nível inferior. No caso em que os alunos não reconheceram a relação entre as variáveis expressaram um nível de generalização aritmética e no caso em que apenas reconheceram uma relação recursiva, expressaram a generalização a um nível factual.

Desta forma, podemos considerar que os níveis de generalização evidenciados pelos alunos foram marcadamente algébricos, com forte incidência no nível global de generalização. Estes níveis de generalização parecem ter sido, também (à semelhança da análise feita para as tarefas com contextos de promoção do pensamento relacional), condicionados por dois fatores: as características das tarefas e o nível de pensamento funcional apreendido. Relativamente às características das tarefas constata-se que o contexto das sequências pictóricas crescentes parece ter sido facilitador para o reconhecimento das variáveis e da relação entre elas, conduzindo a níveis de pensamento funcional mais sofisticados. Esses níveis de pensamento funcional mais sofisticados conduziram os alunos à definição de regras gerais das relações, tratando a indeterminação de forma global e analítica e permitindo níveis de generalização de ordem superior.

Considerando agora a dimensão pedagógica que orientou a condução da experiência de ensino, importa refletir sobre os momentos de discussão coletiva de exploração das tarefas analisadas nesta quinta sequência. De igual forma ao apresentado para os contextos de promoção do pensamento relacional, também nestas tarefas que envolviam aspetos de promoção do pensamento funcional, as discussões coletivas respeitaram eixos condutores comuns. A Figura 8.7 esquematiza, de forma sumária, a linha orientadora das discussões coletivas realizadas nas aulas de exploração das tarefas analisadas nesta sequência.

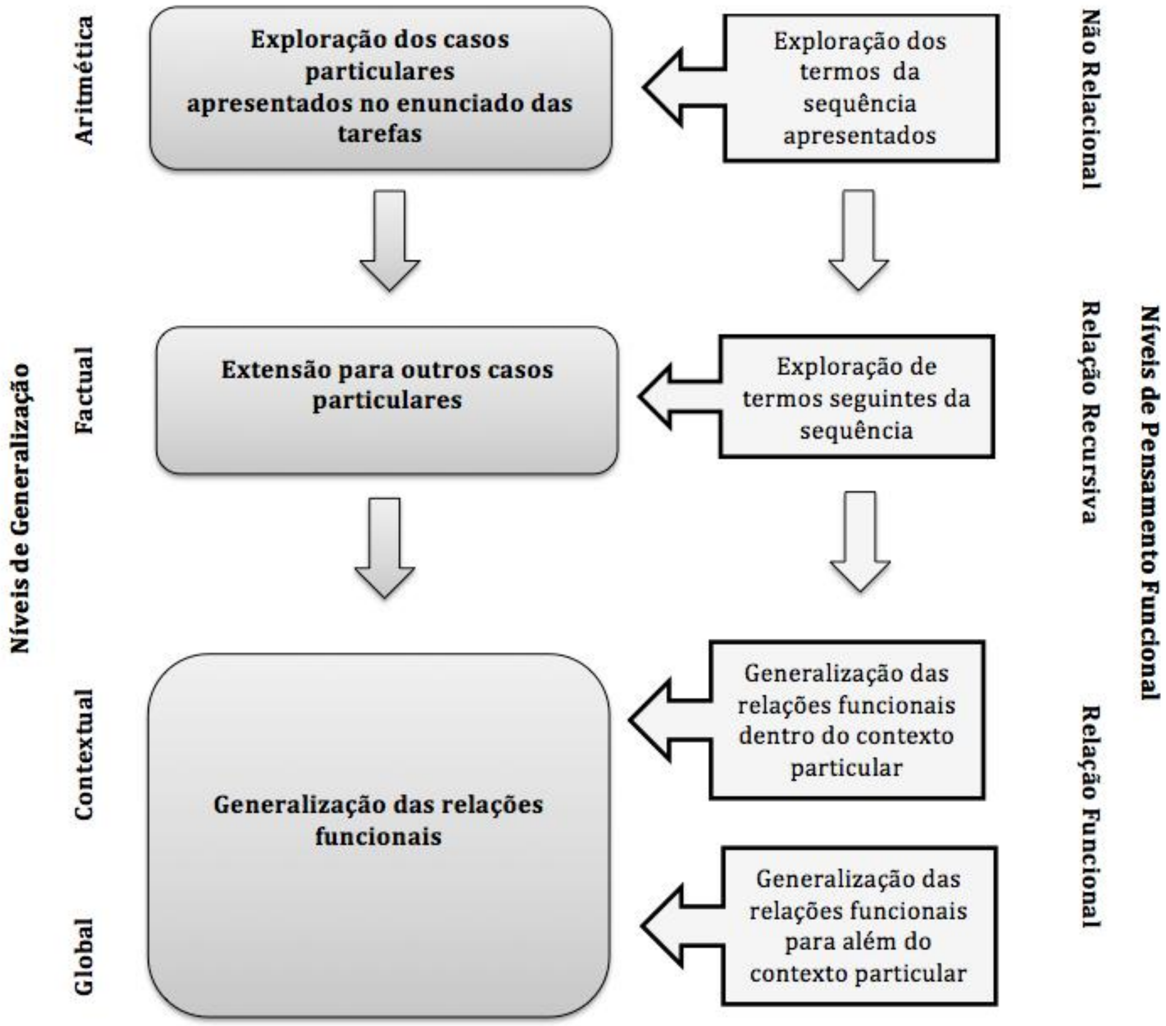


Figura 8.7 – Linha orientadora das discussões coletivas, nos contextos de promoção do pensamento funcional.

Tal como foi referido para os contextos promotores do pensamento relacional, também no que respeita ao pensamento funcional as discussões coletivas mantiveram a mesma linha orientadora relativamente ao processo de generalização. Desta forma, as etapas foram as seguintes: 1) exploração dos casos particulares apresentados nos enunciados das tarefas, 2) extensão para outros casos particulares que evidenciavam a mesma relação numérica e, 3) generalização das relações funcionais. Os diferentes níveis de pensamento funcional foram trabalhados partindo da exploração dos termos apresentados nas sequências pictóricas crescentes, em seguida suscitou-se a extensão para outros termos da sequência até à revelação de um nível de reconhecimento da relação funcional onde se tornava explícita a relação de dependência entre as variáveis. A estes níveis de pensamento funcional fizeram-se corresponder níveis de generalização particulares onde, por exemplo, o reconhecimento da relação funcional poderia estar, de início, dependente do contexto particular da situação e, posteriormente, ser descrita para além desse contexto. Sendo esta uma linha orientadora das discussões coletivas, ela não foi uniforme para todas as tarefas analisadas, tal como foi referido relativamente aos contextos de promoção do pensamento relacional. Para além disso, nas tarefas analisadas da quinta sequência, os níveis de generalização e de pensamento funcional apresentados pelos alunos no decurso do trabalho autónomo foram mais uniformes do que nos contextos de promoção do pensamento relacional.

A Figura 8.8 apresenta uma concretização da condução das discussões coletivas para duas tarefas particulares. Como se pode constatar, os níveis de generalização evidenciados pelos alunos no momento de trabalho autónomo e que, desta forma, iniciaram as discussões coletivas, foram algébricos. Na tarefa 38 foram apresentadas duas resoluções de nível de generalização factual e na tarefa 40 (I) a discussão iniciou-se pelo nível de generalização contextual. Em ambas as tarefas a sequenciação das apresentações das resoluções dos alunos foi conduzida para o nível global de generalização e de reconhecimento da relação funcional. Um aspeto distintivo relativamente às sequências analisadas no contexto do pensamento relacional é o facto de, nas tarefas analisadas da quinta sequência, as resoluções dos alunos no trabalho autónomo já apresentarem níveis superiores de pensamento funcional e de generalização, tendo-se centrado a discussão coletiva na exploração dessas resoluções e não tanto na promoção de níveis superiores. Outro aspeto distintivo prende-se com o facto de a diversidade de níveis de generalização e de pensamento funcional ser inferior ao descrito nas sequências de tarefas anteriores; sendo bastante significativa, nesta sequência, a diversidade de resoluções no mesmo nível, permitindo que a discussão coletiva se centrasse também nas diferentes representações apresentadas pelos alunos. Este aspeto é discutido na secção seguinte relativa aos tipos de representações.

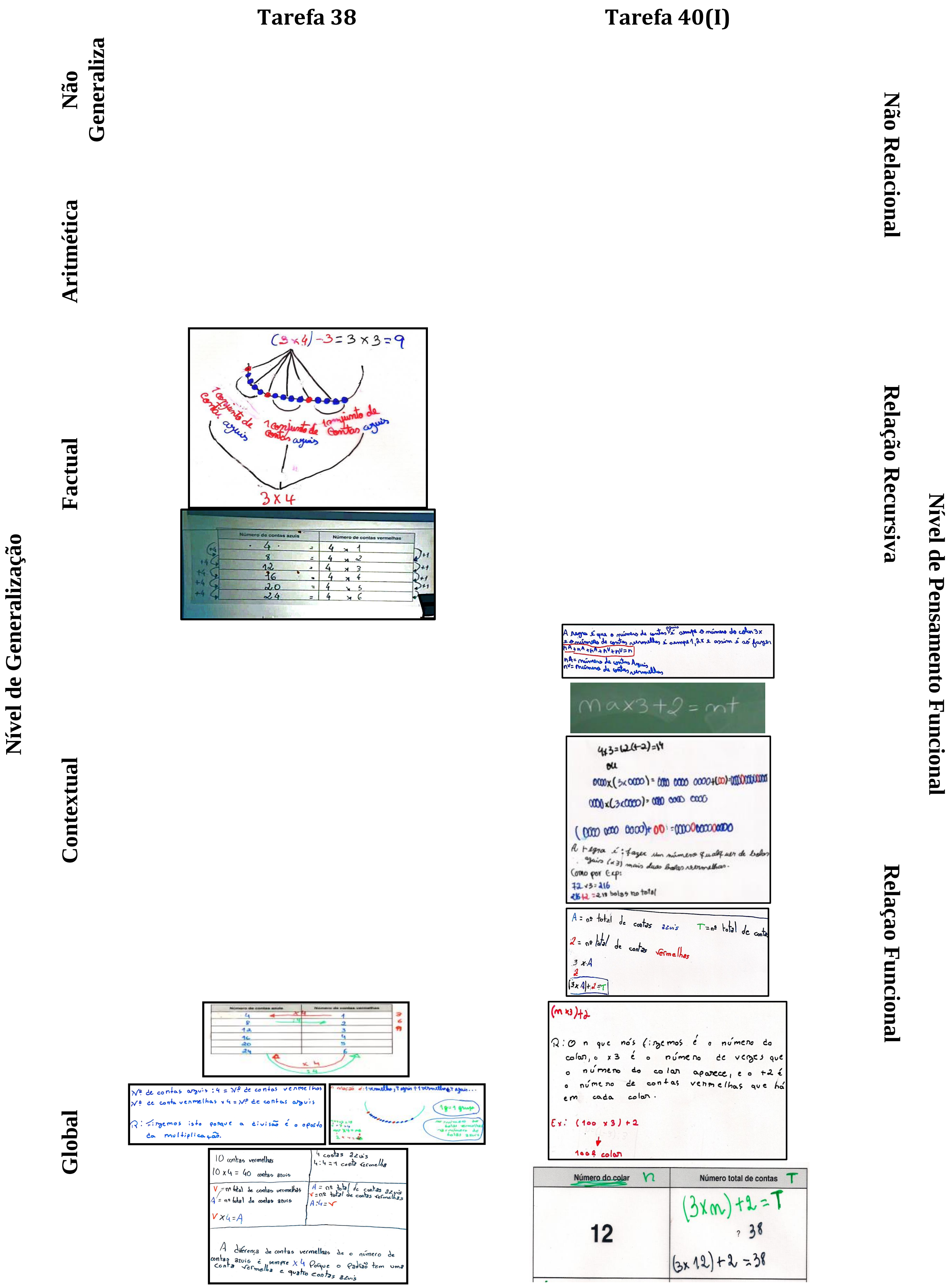


Figura 8.8 – Concretização da linha orientadora da orquestração das discussões coletivas em duas tarefas com contextos de promoção do pensamento funcional.

8.1.3. A capacidade de representação da generalização

Importa agora atender à capacidade de representação da generalização evidenciada pelos alunos ao longo da experiência de ensino. A Figura 8.9 apresenta os tipos de representação usados pelos alunos nas tarefas analisadas das sequências II, III e IV, ou seja, nas tarefas que tinham como contexto a promoção do pensamento relacional.

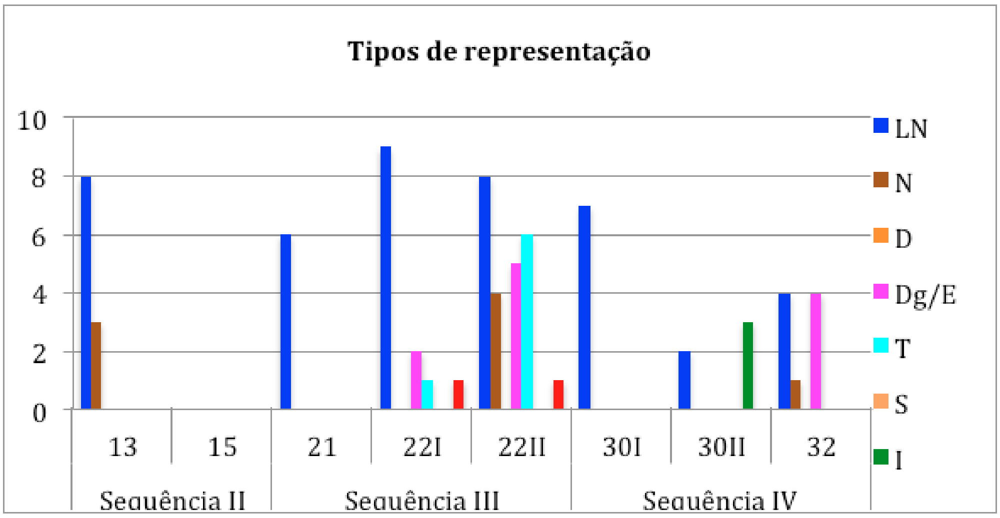


Figura 8.9 – Tipos de representação apresentados pelos pares/grupos de alunos nas tarefas analisadas das sequências II, III e IV.

Nas tarefas analisadas das três sequências referidas pode constatar-se que o tipo de representação mais utilizado pelos alunos foi, sem dúvida, a linguagem natural. Para além deste tipo de representação, os alunos também utilizaram diagramas ou esquemas, representações numéricas e tabelas. Em número muito inferior aos restantes tipos surge também a representação simbólica idiossincrática e alfanumérica. As tarefas onde os alunos utilizaram maior diversidade de tipos de representação nas resoluções do seu trabalho autónomo foram as tarefas da terceira sequência. Nessas tarefas, especialmente na segunda parte da vigésima segunda, os alunos apresentaram cinco tipos de representação diferentes, desde a linguagem natural (com maior frequência absoluta), às tabelas, representações numéricas, diagramas ou esquemas e até linguagem simbólica alfanumérica.

Nas tarefas analisadas da quinta sequência, cujo contexto mobiliza aspetos do pensamento funcional, os tipos de representação mais utilizadas pelos alunos foram a linguagem natural e a representação simbólica alfanumérica (Figura 8.10). Para além destes tipos, e embora em número consideravelmente inferior, também foram utilizados desenhos, tabelas e a linguagem sincopada. A utilização de diagramas/esquemas, de expressões numéricas e da linguagem simbólica idiossincrática foi apresentada apenas uma vez.

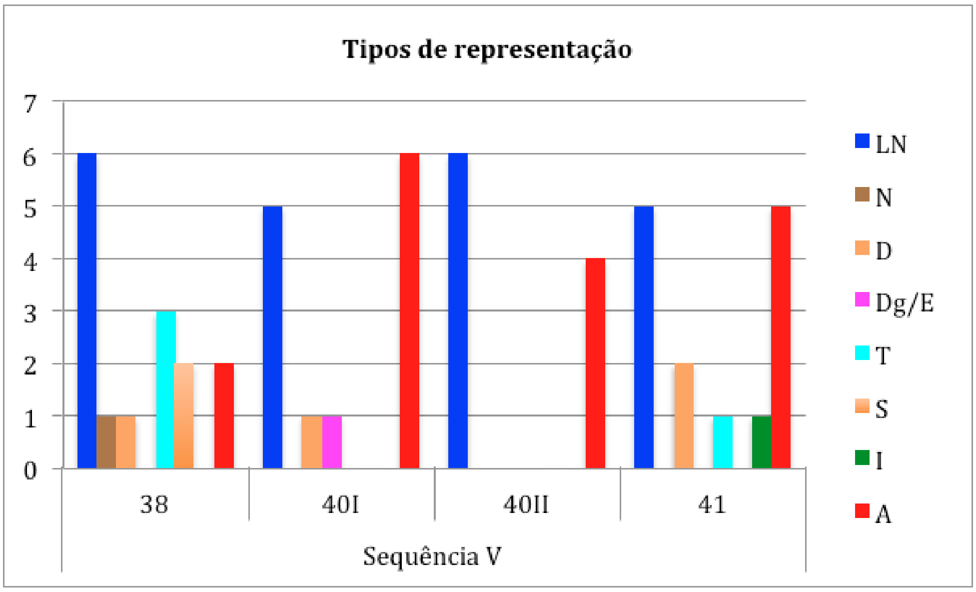


Figura 8.10 – Tipos de representação apresentados pelos pares/grupos de alunos nas tarefas analisadas da sequência V.

A Figura 8.11 apresenta a linha orientadora das discussões coletivas no que respeita à exploração dos diferentes tipos de representação. Assim, de forma geral, representações como diagramas/esquemas, tabelas e desenhos foram utilizadas com o objetivo de explorar as relações numéricas/funcionais, pretendendo-se que as mesmas fossem compreendidas pelos alunos e se tornassem mais explícitas. Na generalização das relações numéricas/funcionais, seja dentro dos contextos particulares das tarefas (generalização de nível contextual), seja para além desses contextos (generalização de nível global), foram privilegiadas representações como a linguagem natural, a linguagem pré-simbólica (sincopada) e a linguagem simbólica idiossincrática e alfanumérica. Dependendo dos contextos das tarefas, de promoção do pensamento relacional ou do pensamento funcional, assim foram usados mais uns ou outros tipos de representação, como foi referido.

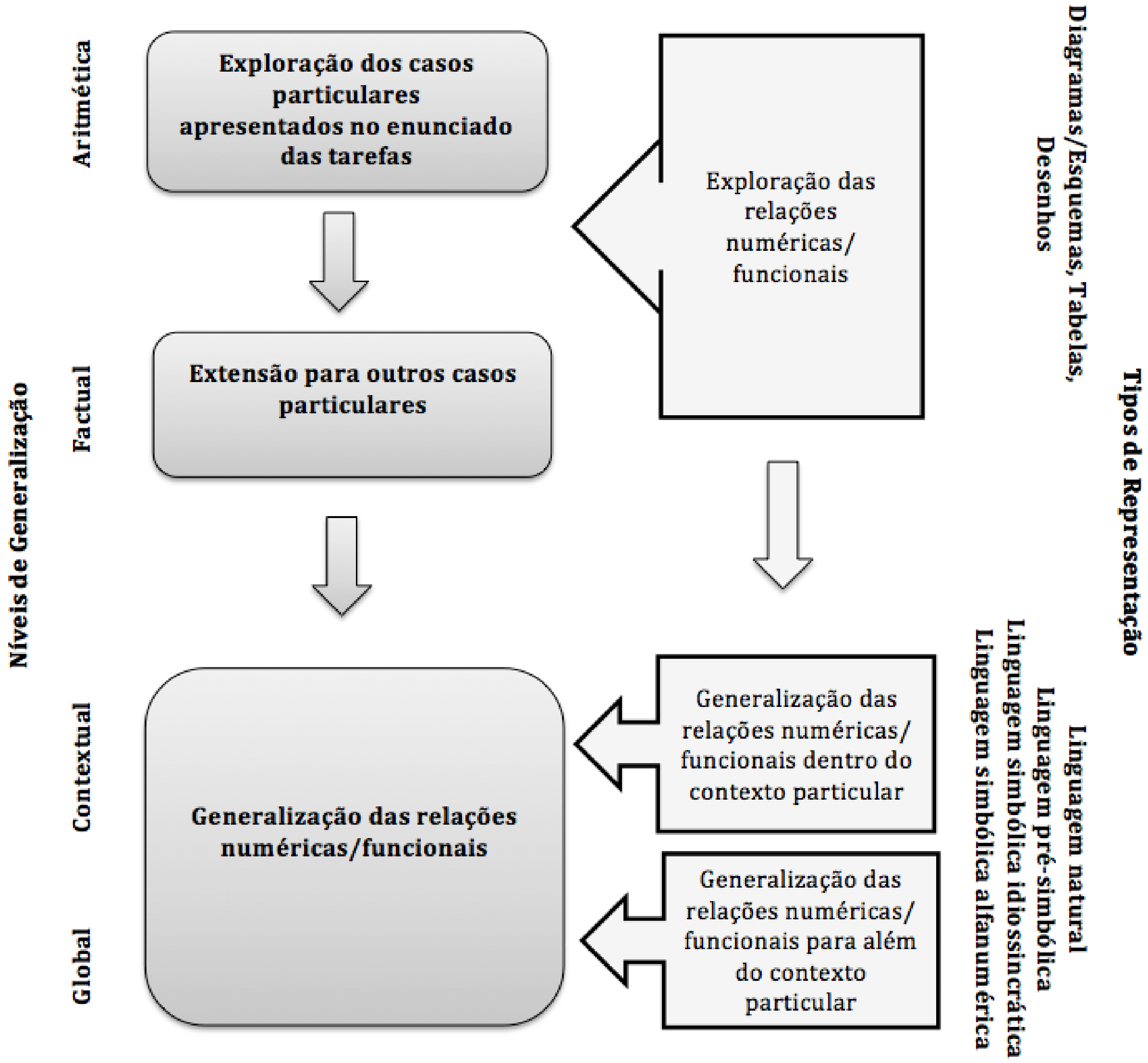


Figura 8.11 – Linha orientadora das discussões coletivas, relativamente aos tipos de representação.

Para a concretização da compreensão sobre a forma como as discussões coletivas exploraram os diferentes tipos de representação apresenta-se, na Figura 8.12, as várias representações e a ordem pela qual foram exploradas em três tarefas que promoveram o desenvolvimento do pensamento relacional. Assim, e embora na tarefa 15, nas resoluções dos alunos nos momentos de trabalho autónomo, não tenham sido consideradas as representações por não apresentarem qualquer nível de generalização, na discussão coletiva foram explorados diferentes tipos de representação com o objetivo de generalizar as relações numéricas envolvidas na tarefa. Desta forma, começou-se por explorar um esquema com as relações numéricas de dobro e metade, a partir de casos particulares. Essa exploração permitiu a representação da generalização da relação em linguagem natural e, posteriormente, em linguagem simbólica idiossincrática. Nas tarefas seguintes, enquadradas na terceira sequência, foi inicialmente explorada a representação da generalização em linguagem natural. Por iniciativa de um aluno, na tarefa 21, emergiu a linguagem simbólica alfanumérica, pois o contexto apresentado na tarefa parece ter mobilizado naturalmente essa forma de representação por já apresentar a relação em linguagem alfanumérica. Tendo em conta a incorreção da expressão apresentada pelo aluno, foi explorada uma tabela e, a partir da mesma, a escrita correta da relação em linguagem alfanumérica. Posteriormente, nessa tarefa foi ainda explorado um diagrama com setas para explicitar de forma clara as relações numéricas. Na primeira parte da vigésima segunda tarefa foram também explorados diferentes esquemas/diagramas e uma tabela para tornar mais explícita a relação numérica e, posteriormente, foi expressa a generalização da relação em linguagem simbólica alfanumérica. Como se pode constatar na Figura 8.12, na tarefa seguinte, segunda parte da vigésima segunda, os alunos apresentaram diferentes tipos de representação nas suas resoluções nos momentos de trabalho autónomo. Tal como em outras tarefas analisadas, os alunos experimentaram nos seus momentos de trabalho autónomo alguns dos tipos de representação explorados nos momentos de discussão coletiva nas tarefas anteriores. Isso é particularmente evidente na tarefa referida. Desta forma, para além dos diferentes tipos de representação explorados nas discussões coletivas permitirem uma maior compreensão das relações numéricas e a expressão da sua generalização, permitiram também a sua utilização gradual por parte de alguns alunos, nos momentos de trabalho autónomo.

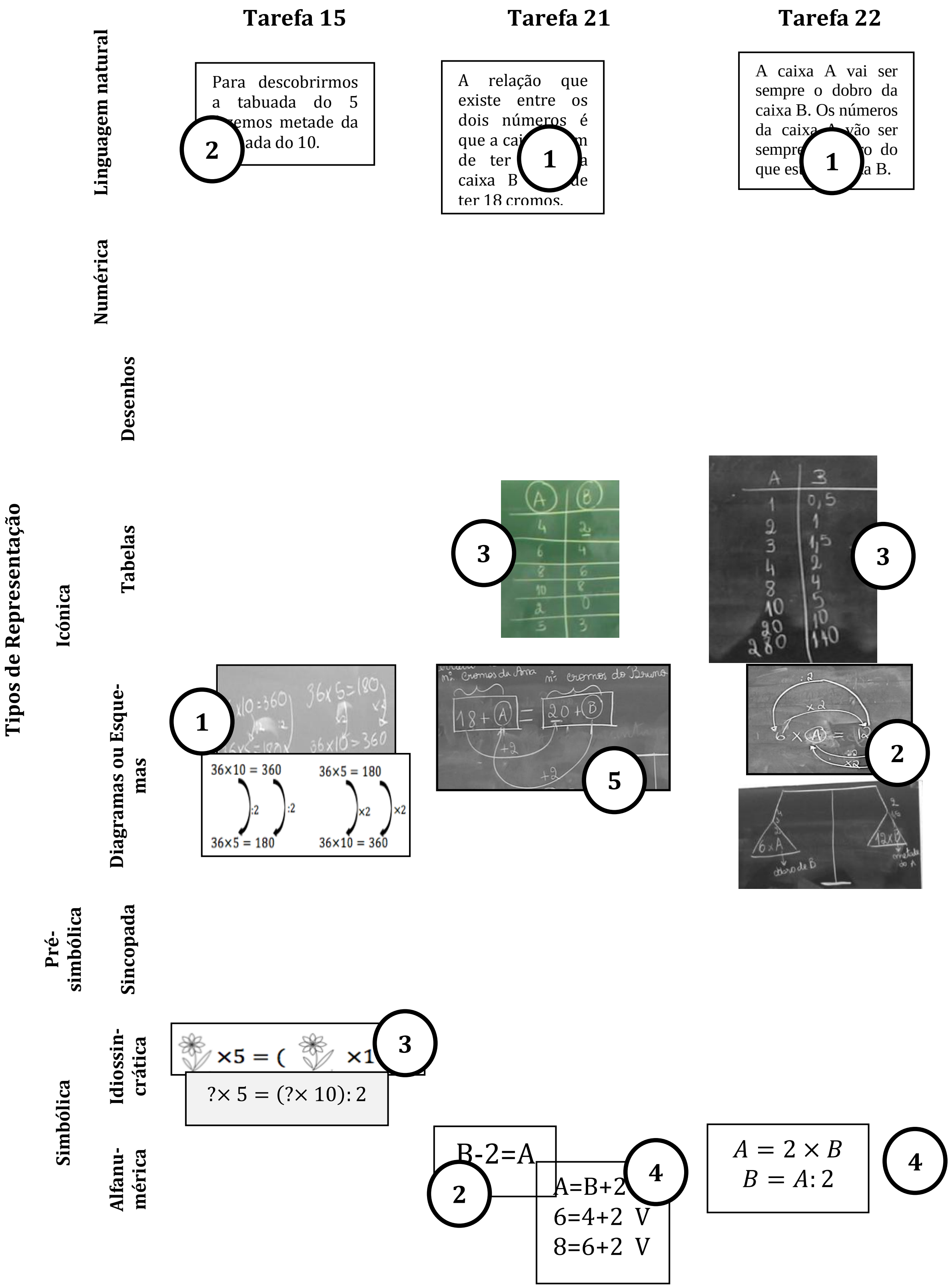


Figura 8.12 – Tipos de representação explorados na discussão coletiva, em tarefas analisadas das sequências II e III.

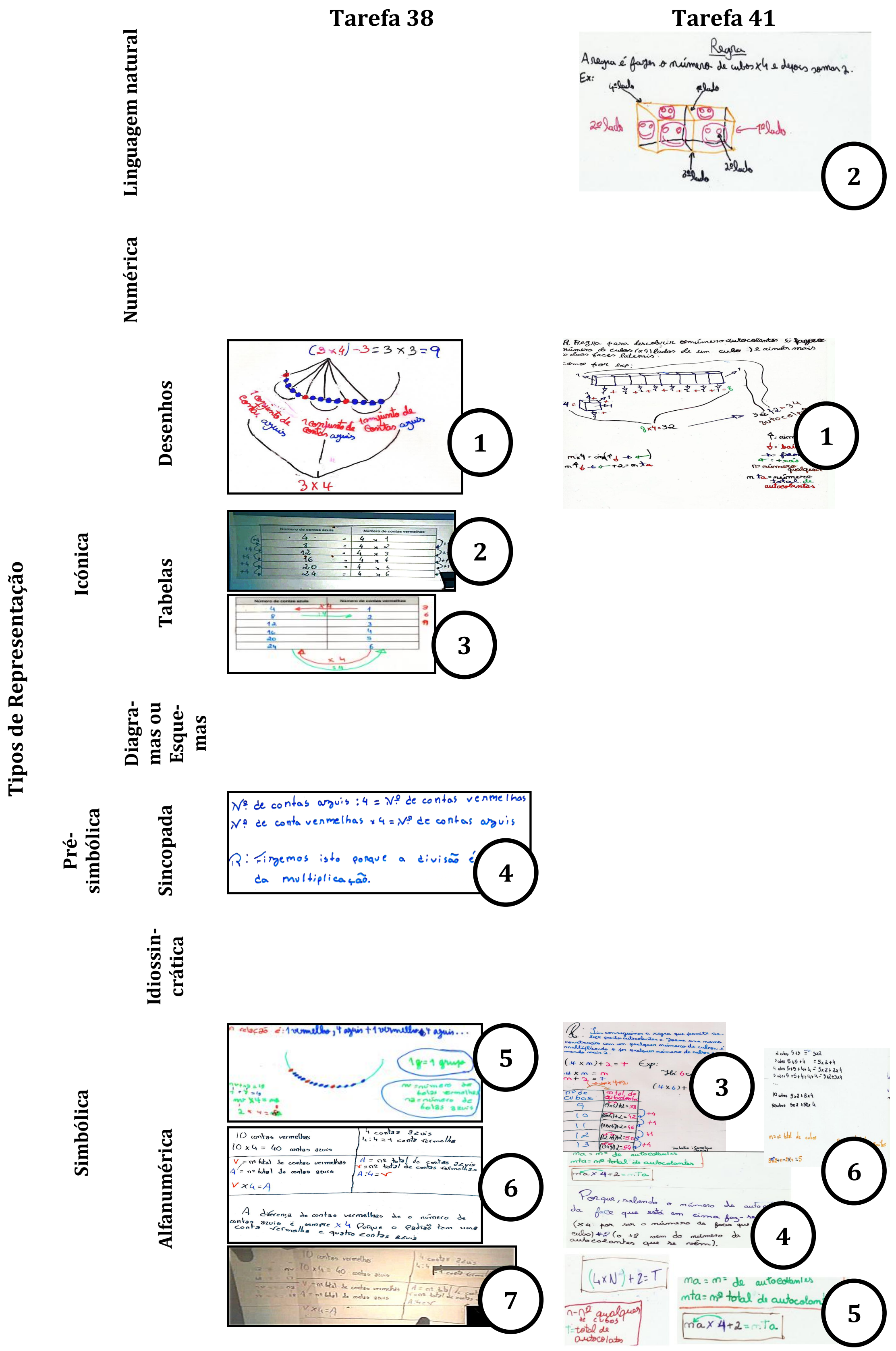


Figura 8.13 – Tipos de representação explorados na discussão coletiva, em tarefas analisadas da sequência V.

Na Figura 8.13 são apresentados os tipos de representação explorados nos momentos de discussão coletiva das tarefas analisadas da quinta sequência, que promoviam aspetos de desenvolvimento do pensamento funcional. Como se pode observar na figura, verifica-se em muitas resoluções que o par/grupo de alunos apresenta mais do que um tipo de representações. Desta forma, optou-se por colocar, na figura, o tipo de representação usado por esses alunos que foi mais explorado na discussão coletiva.

Como foi referido anteriormente, nestas tarefas da quinta sequência, os alunos conseguiram apreender com facilidade níveis de generalização mais sofisticados e isso também foi evidente no tipo de representações que utilizaram nas resoluções dos seus trabalhos autónomos. Na tarefa trigésima oitava é apresentada uma maior diversidade de tipos de representação. Na discussão coletiva dessa tarefa começou-se por explorar uma representação icónica apresentada por um dos pares de alunos e, em seguida, foi apresentada e reformulada uma tabela apresentada por outro par. As representações simbólicas em linguagem alfanumérica foram exploradas no coletivo, comparando as suas semelhanças e diferenças. Deste modo, nos momentos de discussão coletiva desta tarefa, procuraram-se explorar conexões entre os diferentes tipos de representação e entre representações do mesmo tipo. Assim, e com particular evidência nesta sequência de tarefas, os momentos de discussão coletiva exploraram também as conexões entre as representações do mesmo tipo, com relevante importância para a construção do significado das representações simbólicas.

Entre os diferentes tipos de representação referidos, a representação em linguagem simbólica teve uma evidência crescente ao longo da experiência de ensino realizada. A Figura 8.14 procura descrever esse processo de construção do sentido de símbolo, de forma sistemática. Inicialmente, partindo de uma conceção de símbolo com significado de incógnita, os alunos começaram a utilizar o ponto de interrogação, por sugestão da investigadora ao introduzi-lo na exploração da tarefa “Salas de cinema”, com valor de “qual o número” em expressões como “$? x 5 = 100$”. A introdução progressiva desse símbolo foi assumindo-se como o valor de “qualquer número”, sempre que os alunos queriam representar uma quantidade numérica não determinada, mas que assumisse a possibilidade de variação de quantidade nas relações numéricas exploradas. Desta forma e progressivamente, esse símbolo foi assumindo a conceção de número generalizado. A utilização de outros símbolos, idiossincráticos, criados por alguns alunos, permitiu a não cristalização no ponto de interrogação e a abertura para outras representações que traduzissem o significado de “qualquer número”, permitindo-lhes ainda a compreensão de importantes relações numéricas. Este facto é particularmente evidente quando alguns alunos tentam representar a metade de “qualquer número” utilizando um símbolo pictórico e desenhando a sua metade, na tarefa 15 da segunda sequência. Progressivamente a noção de variável foi sendo construída, discutindo-se em diferentes momentos de aula importantes aspetos como, por exemplo, se o mesmo símbolo representaria o mesmo valor numérico e a própria exploração da igualdade enquanto relação, favorecendo a interpretação do sinal de igual enquanto símbolo relacional e não apenas indicador do resultado de um cálculo. Nestas discussões, foi particularmente importante a forma como alguns alunos explicavam o significado da simbologia que utilizavam, atribuindo significado a esses símbolos e permitindo a sua compreensão progressiva. Para tal, o apoio nos contextos das tarefas parece ter promovido uma maior compreensão da simbologia utilizada pelos alunos, facto particularmente evidente nas tarefas apresentadas nas terceira e quinta sequências. Nesta última sequência a representação de variável utilizando o símbolo n foi assumida coletivamente na turma e a sua utilização foi crescente nas resoluções apresentadas pelos alunos nos momentos de trabalho autónomo. Adicionalmente, a aprendizagem de uma forma particular (simbólica) de representar a indeterminação parece ter sido também promotora de um maior desenvolvimento da capacidade de generalização, tornando mais explícita, clara e concisa a definição de regras gerais das relações numéricas e funcionais, inicialmente formuladas em linguagem natural.

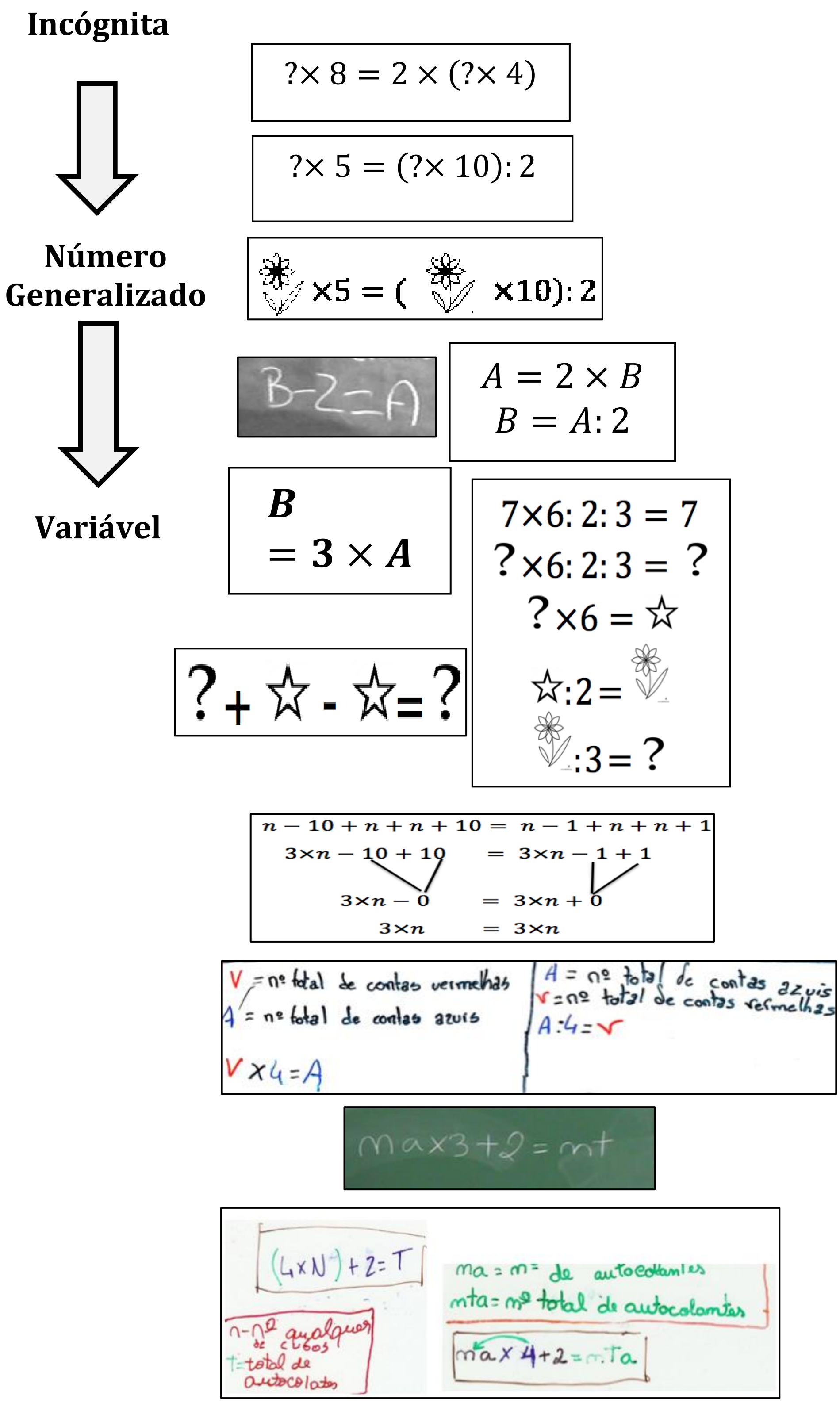


Figura 8. 14 – Processo de construção do sentido do símbolo, ao longo da experiência de ensino.

Relativamente à evolução da capacidade de representação da generalização neste estudo, importa destacar o seguinte:

1. O tipo de representação da generalização mais utilizado pelos alunos, ao longo das tarefas analisadas, foi a linguagem natural.
2. Nas tarefas com contexto de promoção do pensamento funcional foi evidente a crescente apropriação e utilização da linguagem simbólica alfanumérica.
3. Outro tipo de representações como diagramas ou esquemas, tabelas e desenhos foram usadas pelos alunos durante os momentos de trabalho autónomo e nas discussões coletivas para evidenciar e compreender as relações numéricas e funcionais.
4. A linguagem natural e a linguagem simbólica foram utilizadas pelos alunos para expressar a generalização das relações numéricas e funcionais.
5. A crescente apropriação da linguagem simbólica foi conduzida por um processo de reconhecimento das diferentes dimensões da indeterminação: como incógnita, como número generalizado e, posteriormente, como variável. Essa apropriação foi gradual, alicerçada na compreensão dos conceitos, com a possibilidade de construção e utilização de símbolos próprios, idiossincráticos.
6. Para a apropriação desse sentido de símbolo foram importantes os contextos das tarefas (nomeadamente das tarefas das terceira e quinta sequências) e as discussões coletivas onde o significado do símbolo era explorado de forma intencional.
7. A utilização crescente da linguagem simbólica parece ter emergido da necessidade de definir de forma clara e concisa regras gerais anteriormente expressas em linguagem natural. Essa utilização parece ainda ter contribuído para uma maior compreensão das próprias relações numéricas.

8.2. Principais conclusões do estudo

Nesta secção responde-se às questões do estudo, confrontando os seus resultados com importantes referências teóricas e que serviram de base à formulação da conjetura que orientou a experiência de ensino realizada, nas suas dimensões de conteúdo e pedagógica.

Como evoluiu, ao longo da experiência de ensino, a capacidade de generalização dos alunos em contextos de promoção do pensamento relacional?

A capacidade de generalização dos alunos da turma foi evoluindo à medida que eram exploradas tarefas com contextos de promoção do pensamento relacional. Assim, nas tarefas com contextos de promoção do pensamento relacional, os alunos começaram por explorar as relações numéricas em casos particulares e, a partir destes, conseguiram estendê-las para outros casos até enunciar a sua generalização. Desta forma, os primeiros níveis de pensamento relacional centraram-se exatamente na exploração desses exemplos particulares e assumiram níveis de generalização aritméticos em que a comunalidade não é estendida para quantidades indeterminadas. Progressivamente, os alunos conseguiram estender esses casos particulares para outros semelhantes, usando um sentido de quase-variável (Fuji, 2003), e apreender níveis de generalização algébricos, embora de nível inferior. Quando os alunos conseguiam apreender relacionalmente as situações para além dos casos particulares, evidenciavam um nível de generalização algébrico superior. Esse nível poderia ainda evidenciar uma dependência com a descrição do contexto da situação (generalização contextual) ou não necessitar da descrição desse contexto, evidenciando um nível de generalização mais geral (generalização global).

Dois fatores parecem ter sido determinantes para a evolução dos níveis de generalização dos alunos: o nível de pensamento relacional apreendido e as características das tarefas.

Relativamente ao primeiro facto, constata-se que, quando os alunos evidenciam um nível relacional das situações exploradas, conseguem níveis de generalização mais sofisticados. Assim, parece ser claro que os níveis de generalização estão dependentes da capacidade de os alunos conceberem relacionalmente as situações que lhes são apresentadas. Tendo em conta que, o pensamento relacional diz respeito à capacidade de *olhar* para expressões ou equações na sua conceção mais ampla, revelando as relações existentes (Carpenter et al., 2003), é natural a relação entre o desenvolvimento do pensamento relacional e o desenvolvimento da capacidade de generalização.

Relativamente ao segundo facto, características das tarefas, evidencia-se uma estreita relação entre dois aspetos particulares das tarefas. O primeiro prende-se com a apresentação da possibilidade da variação de quantidades numéricas e o segundo com a existência de contextos de modelação.

Assim, quando as tarefas apresentavam não apenas um caso particular, mas vários, os alunos acediam com maior facilidade às relações numéricas de forma geral. Em tarefas que apresentavam apenas um caso particular, os alunos centravam-se na exploração desse caso e, com maior dificuldade conseguiam apreender a possibilidade de variação de quantidades, dificultando a extensão para além dos casos particulares e a generalização. De facto, Stephens

(2006) salienta a importância de os alunos serem capazes de ver e usar possibilidades de variação, considerando-a como uma importante característica do pensamento relacional.

A existência de contextos de modelação, para além dos contextos numéricos, também foi facilitador para a compreensão da situação, conduzindo a uma maior apreensão do nível relacional e de generalização. Desta forma, contextos estritamente numéricos acarretaram maiores dificuldades na apreensão das relações e na sua generalização. Constata-se, assim, a importância dos contextos de modelação de forma a dar sentido aos conceitos (Tabach & Friedlander, 2008) e, em particular, à indeterminação. De acordo com Carraher et al. (2008), a utilização de problemas com contextos ricos para suportar a compreensão dos conceitos mais abstratos é um dos três aspetos definidores da *Early Algebra*.

Estes resultados são consistentes com os estudos que demonstram a importância da promoção do pensamento relacional para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos (e.g. Bastable, 2007; Carpenter et al., 2003, 2005; Carraher et al., 2006, 2007; Fujii & Stephens, 2008; Jacobs et al., 2009; Knuth et al., 2006; Molina, 2009; Rivera, 2006;). De facto e de acordo com Rivera (2006), a aritmética deve ser ensinada de tal forma que os alunos percebam as propriedades das operações ou as relações numéricas existentes em objetos individuais para, progressivamente, verificarem que são invariantes dos objetos iniciais. Neste sentido, reitera-se a importância da exploração de tarefas envolvendo contextos de promoção do pensamento relacional, assumindo a conceção de Carpenter et al. (2003) ao considerarem a potencialidade desta ligação entre a aritmética e a álgebra e o aportar de significado, profundidade e coerência à aprendizagem dos próprios conteúdos aritméticos (NCTM, 2000).

Concluindo, a capacidade de generalização dos alunos, em contextos de promoção do pensamento relacional, foi evoluindo no sentido da mudança de atenção dos casos individuais para os casos mais gerais. Esta mudança do foco de atenção conduziu a uma progressiva sofisticação da capacidade de generalização, ancorada ao mesmo sentido de progressão da apreensão do pensamento relacional. No entanto, essa progressão não foi linear, revelando-se particularmente dependente das características das tarefas. Assim, tarefas que não apresentavam diferentes possibilidades de variação de quantidades ou contextos estritamente numéricos apresentaram maiores dificuldades de apreensão da generalização das relações numéricas.

Como evoluiu, ao longo da experiência de ensino, a capacidade de generalização dos alunos em contextos de promoção do pensamento funcional?

Em resposta a esta questão, podemos afirmar que nas tarefas analisadas com contexto de promoção do pensamento funcional, maioritariamente, os alunos evidenciaram níveis de generalização algébricos, inicialmente contextuais e, posteriormente, de nível global. Assim, a evolução da generalização foi no sentido de reconhecerem e usarem o contexto da situação para a generalização e, progressivamente, abandonarem esse contexto para a definição de regras mais globais.

Relativamente ao nível de pensamento funcional, os alunos, de forma geral, reconheceram as variáveis envolvidas nas sequências e a relação de dependência entre elas, apreendendo um nível funcional das relações. Tal como nas tarefas que promoveram o desenvolvimento do pensamento relacional, o nível de pensamento funcional apreendido pelos alunos impulsionou o nível de generalização e, neste caso, para níveis superiores.

Também as características das tarefas parecem ter sido um fator de influência na capacidade de generalização dos alunos. Tendo em conta que as tarefas analisadas eram sequências pictóricas crescentes, esses contextos parecem ter sido facilitadores da apreensão das relações funcionais.

Como evidenciam os resultados da investigação sobre a exploração de padrões, nomeadamente as investigações de Barbosa (2010), Orton e Orton (1999), Santos (2008), Vale (2009) e Warren (2005, 2011), estas tarefas parecem ser contextos favoráveis para o desenvolvimento do pensamento funcional dos alunos, e desta forma, do seu pensamento algébrico. Assim, a exploração de padrões pode ajudar os alunos a compreenderem as relações de dependência entre quantidades e contribuir para a compreensão da noção de função (Carraher et al., 2008; Moss e Beatty, 2006; NCTM, 2000; Ponte et al., 2009).

Relativamente ao contexto de promoção do pensamento funcional, o facto de estas tarefas terem sido exploradas na experiência de ensino numa fase final também parece ter contribuído para a facilidade que os alunos demonstraram na identificação das relações funcionais e na apreensão de níveis de generalização superiores. Mais especificamente, refira-se a exploração das tarefas analisadas da sequência III que, embora enquadradas num contexto de promoção de pensamento relacional, iniciaram uma abordagem informal ao conceito de variável. Desta forma, o trabalho anteriormente realizado com tarefas com contextos de promoção do pensamento relacional também possibilitou a realização de um processo de exploração da relação de igualdade, de relações numéricas, propriedades das operações e relação entre operações inversas, e até da emergência do conceito de variável, que parece ter sido percursor para a compreensão das relações funcionais.

Concluindo, em resposta à segunda questão formulada pode referir-se que a capacidade de generalização dos alunos, nos contextos de promoção do pensamento funcional, evoluiu no crescente despreendimento da necessidade de utilização da descrição dos contextos das tarefas, resultando na formulação de regras mais globais.

Como evoluiu, ao longo da experiência de ensino, a capacidade de representação da generalização dos alunos?

Para responder a esta questão, deve referir-se que a linguagem natural foi um tipo de representação presente ao longo de toda a experiência de ensino e usado para expressar diferentes níveis de generalização. Relativamente a outros tipos de representação, constatou-se que uns foram privilegiados para exploração das relações numéricas/funcionais e outros para a expressão da generalização. Assim, diagramas ou esquemas, desenhos e tabelas foram usados, maioritariamente, para explicitação das relações numéricas/funcionais e a linguagem natural, linguagem pré-simbólica (sincopada) e a linguagem simbólica (idiossincrática e alfanumérica) foram usados, maioritariamente, para a expressão da generalização. Apesar da permanência da linguagem natural ao longo da experiência de ensino para expressar a generalização, constatou-se uma crescente apropriação e utilização da linguagem simbólica. Verificou-se ainda que, à medida que evoluiu o nível de generalização ao longo da experiência de ensino, também a linguagem simbólica foi emergindo e evoluindo.

Os resultados deste estudo revelam, assim, a importância da exploração de diferentes tipos de representação para o desenvolvimento da capacidade de generalização (Britt & Irwin, 2011; Dörfler, 2008). Diferenciando entre os tipos de representação que serviram para explorar as relações matemáticas e os tipos de representação que mais contribuíram para a representação da sua generalização, este estudo distingue as funções desempenhadas por esses diferentes tipos de representação. Paralelamente, é relevada a importância da exploração da diversidade de tipos de representação e, adicionalmente, da conexão entre eles (NCTM, 2000; Warren & Cooper, 2011).

Relativamente à apropriação da linguagem simbólica e na perspetiva da construção do sentido de símbolo (Arcavi, 1994), este estudo demonstra a importância da utilização de contextos significativos para a atividade que os alunos realizam sobre os símbolos, de modo que estes não sejam encarados como entidades formais e sem sentido, mas como poderosas formas de compreender e resolver problemas e de comunicar (Arcavi, 2005). A forma como a simbologia foi sendo apropriada parece, ainda, ir ao encontro da perspetiva de que a mesma surge como uma necessidade sentida pelos alunos no decurso do processo de generalização (Kaput et al., 2008), entendendo-a ao serviço dessa generalização (Kaput, 2008). Neste sentido, este estudo mostra como a introdução da notação algébrica em alunos deste nível de escolaridade poderá ser apropriada e até pertinente, pois permite aceder não só ao significado dos símbolos, como oferecer novas formas de percecionar as relações matemáticas (Russell et al., 2011). Nesta linha de pensamento, Brizuela et al. (2000) consideram que a notação simbólica pode ser "uma ferramenta para pensar e refletir" (p. 5), que pode ser usada no processo de resolução de um problema, por exemplo, mas também pode servir para pensar e refletir sobre as relações entre as quantidades desse problema. Neste sentido, neste estudo, a introdução à simbologia parece ter promovido uma maior compreensão das próprias relações matemáticas exploradas.

O percurso de apropriação da linguagem simbólica, ao longo da experiência de ensino, passou por diversas etapas que permitiram aos alunos conceber o símbolo como incógnita, número generalizado e construir progressivamente a conceção de variável. Nesse percurso foi importante a utilização de representações idiossincráticas, dando possibilidade aos alunos de relacionarem as suas próprias representações com as que são próprias da matemática (Smith, 2008). A opção assumida foi, assim, encorajar os alunos a representarem as suas ideias da forma que lhes fazia sentido, mesmo que essas não fossem as convencionais, e progressivamente, ao longo da experiência de ensino, foram introduzidas pela investigadora formas de representação convencionais. Este percurso vai no sentido daquilo que é perspetivado pelo NCTM (2000) ao referir a importância da exploração das representações próprias dos alunos e progressiva apreensão das formas convencionais, de modo a facilitar a aprendizagem e comunicação matemáticas.

Neste estudo, as discussões coletivas foram dinamizadas pela investigadora com o intuito de que diferentes representações fossem partilhadas e questionadas, de forma a promover a construção do sentido de símbolo alicerçada na compreensão do seu significado. Esta perspetiva está de acordo com Kaput et al. (2008) quando consideram que o processo de simbolização é uma construção coletiva, mediada pelas intervenções dos alunos, quando inseridos em salas de aulas onde as discussões matemáticas são "nutridas e apoiadas" (p. 28), e que vive de aditivas redefinições desenvolvendo uma cadeia de significação (Cobb et al., 1997) que é orquestrada pela ação do professor.

Concluindo, a evolução da representação da generalização respeitou a construção progressiva da simbologia matemática, sendo sempre ancorada na utilização da linguagem natural e na utilização de vários tipos de representação que permitiam a compreensão das relações matemáticas.

Como a experiência de ensino contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos?

Para responder a esta questão importa considerar a conjetura que orientou a realização da experiência de ensino, nas suas duas dimensões, de conteúdo e pedagógica.

A dimensão de conteúdo da conjetura assentou numa definição particular de pensamento algébrico (Blanton & Kaput, 2005), onde a generalização e a sua representação são considerados como aspetos centrais. Desta forma, a promoção da capacidade de generalização e da sua representação orientaram transversalmente a experiência de ensino. Paralelamente, foram considerados como contextos para a promoção da generalização tarefas envolvendo aspetos relacionados com o desenvolvimento do pensamento relacional e com o desenvolvimento do pensamento funcional. Conjeturou-se, assim, que a generalização e a sua representação, enquanto aspetos centrais para o desenvolvimento do pensamento algébrico, seriam promovidos em tarefas com contextos de exploração do pensamento relacional e do pensamento funcional.

A experiência de ensino promoveu, inicialmente, a exploração de tarefas com contexto de pensamento relacional e, posteriormente, tarefas com contexto de pensamento funcional. As tarefas que promoveram o desenvolvimento do pensamento relacional foram trabalhados no sentido de serem reveladas as relações existentes em casos particulares, depois a sua extensão para outros casos de forma a evidenciar a sua comunalidade e, finalmente, a expressão geral para além dos casos particulares. As tarefas que promoveram o desenvolvimento do pensamento funcional exploraram situações que permitiram identificar as variáveis envolvidas numa relação de dependência, inicialmente em casos particulares e, progressivamente estendendo-os para outros casos até à generalização da relação funcional. Assim, embora os contextos de pensamento relacional e de pensamento funcional tivessem características distintivas, a exploração que foi realizada no sentido da promoção da generalização das relações foi semelhante e, também, progressivamente, em ambos os contextos, foram promovidos diferentes tipos de representação da generalização, gradualmente mais simbólicos.

A dimensão pedagógica da conjetura diz respeito à forma como o conteúdo foi ensinado. Em particular, nesta experiência de ensino, assumiu-se a importância de uma perspetiva dialógica da aprendizagem (Wells, 2000), conjeturando-se que uma metodologia de ensino-aprendizagem de natureza exploratória (Baxter & Williams, 2010; Canavarro, 2011; Oliveira et al., 2013; Ponte, 2005; Stein et al., 2008) contribuiria para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Assim, assumiu-se a importância da promoção de um ambiente de sala de aula onde os alunos trabalham a pares, em pequenos grupos e coletivamente e onde as discussões coletivas assumem um papel predominante. Para além disso, conjeturou-se que a organização das tarefas matemáticas em sequências permitia o desenvolvimento progressivo dos aspetos considerados essenciais para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A experiência de ensino realizada tem, desta forma, de ser perspetivada de acordo com estas duas dimensões da conjetura que a orientou. Os resultados apresentados demonstram a pertinência de ambas as dimensões ao revelarem como a capacidade de generalização foi desenvolvida pelos alunos em ambos os contextos referidos e como as discussões coletivas contribuíram para a sua evolução. Assim, constata-se a importância da dimensão social da construção da generalização, assumindo-a como uma representação coletiva (Ellis, 2011) e, em simultâneo, a construção coletiva do processo de simbolização (Kaput et al., 2008).

Relativamente à potencialidade das tarefas e das sequências de tarefas, constata-se que as tarefas que apresentavam explicitamente a variação de quantidades ou contextos modeladores significativos para a sua compreensão foram promotoras de níveis de generalização mais sofisticados. Contudo, constata-se ainda que em tarefas que não respeitavam estas características, foi possível, em momento de discussão coletiva, explorar a sua generalização para um nível superior.

Para além disso, constata-se a importância de um tratamento algébrico da aritmética (Cai & Knuth, 2005) e como a introdução do pensamento algébrico na escola elementar acarreta novas formas de percecionar o modo como a aritmética e a álgebra se relacionam, podendo constituir uma ponte entre elas (Carraher & Schliemann, 2007). Neste sentido, a importância do desenvolvimento de um pensamento de nível superior, como a generalização, contribui ainda para promover as competências aritméticas, como a fluência de cálculo e a compreensão das próprias relações aritméticas (Kaput et al., 2008).

Desta forma, este estudo demonstra como a exploração algébrica pode ser feita a partir de contextos ricos e significativos para os alunos desenvolverem as capacidades próprias da aritmética, mesmo quando não revelam, à partida, um entendimento relacional da mesma. De facto, pelos resultados apresentados inicialmente pelos alunos na resolução do teste de diagnóstico, nomeadamente, a forma enclausurada e dependente de procedimentos rotineiros aritméticos (marcadamente algorítmicos) e a dificuldade em reconhecer a plausibilidade dos seus raciocínios, a opção de começar o desenvolvimento do pensamento algébrico pelos aspetos relativos ao pensamento relacional mostrou-se adequada. Ao compreenderem relacionalmente os conteúdos aritméticos, estes alunos conseguiram aprofundar esses conhecimentos e, simultaneamente, aceder a níveis mais sofisticados de pensamento com o desenvolvimento da capacidade de generalização. Assim, o carácter potencialmente algébrico da aritmética foi marcadamente explorado neste estudo e promotor do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

A opção por explorar a variação de quantidades e, desta forma, aceder à indeterminação, contribuiu também para combater a visão enclausurada da aritmética. Ao acederem ao conceito de variação de quantidades e, particularmente, à relação entre quantidades que variavam entre si, de forma dependente e correspondente, a introdução ao pensamento funcional foi também promovida. Nas tarefas que exploravam aspetos do pensamento funcional, os alunos conseguiram identificar as variáveis envolvidas e a relação de dependência entre elas, conceitos primordiais para a compreensão do conceito de função. Desta forma, a opção de introduzir o pensamento relacional e, posteriormente, trabalhar aspetos relativos ao pensamento funcional, parece ter delineado uma trajetória conducente ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Para além disto, este estudo mostrou uma relação de continuidade entre as vertentes do pensamento relacional e do pensamento funcional. Contrariamente a outras investigações cuja opção foi marcadamente de exploração de apenas uma das vertentes como, por exemplo, as relativas ao desenvolvimento do pensamento relacional (e.g. Carpenter et al, 2003; Jacobs et al., 2007; Molina, 2009) ou ao desenvolvimento do pensamento funcional (e.g. Barbosa, 2008; Carraher & Schliemann, 2007; Santos, 2008; Warren & Cooper, 2005), este estudo procurou tecer uma ligação entre essas duas vertentes. Desta forma, considerando o pensamento relacional como percursor, por explorar relacionalmente a aritmética, o pensamento funcional surge em sua continuidade, explorando também relacionalmente a aritmética, mas introduzindo aspetos específicos da relação de dependência entre variáveis. De facto, as relações trabalhadas em todas as tarefas analisadas neste estudo foram sempre relações aritméticas que foram sendo exploradas com progressiva complexidade nos diferentes contextos.

Considerando a conjetura que orientou a realização da experiência de ensino, após a conclusão da mesma, há também que refletir sobre os aspetos que deveriam ser tidos em conta numa sua possível reformulação, em particular, na dimensão de conteúdo.

O primeiro aspeto prende-se, efetivamente, com a relação entre os contextos de promoção de generalização considerados. Se a conjetura indicava os contextos de promoção do pensamento relacional e do pensamento funcional como aspetos distintos, o estudo veio revelar a forte interdependência entre ambos, permitindo destacar alguma continuidade e pontos de convergência. Assim, ambos os contextos podem ser vistos como promotores do pensamento relacional (considerando, desta forma, a dimensão relacional do pensamento funcional) e o pensamento funcional pode ser encarado como um nível mais sofisticado do pensamento relacional ao explorar, explicitamente, a relação de dependência entre variáveis. Como ponto de convergência entre ambos os pensamentos, a exploração da relação de variação de quantidades parece ser de extrema importância ao permitir uma visão mais relacional da aritmética e a emergência da noção de variável.

O segundo aspeto refere-se à relação entre o desenvolvimento da capacidade de generalização e o desenvolvimento dos pensamentos relacional e funcional. Assim, se a conjetura inicial potenciava o desenvolvimento da capacidade de generalização em contextos de promoção dos pensamentos relacional e funcional, os resultados apresentados neste estudo mostram a estreita dependência entre a evolução da generalização e esses contextos. Desta forma, enquanto contextos de promoção da generalização, condicionam, eles próprios, o desenvolvimento da generalização.

O terceiro aspeto prende-se com o papel destacado das representações e, em particular, da representação simbólica. Embora fosse considerada a importância da exploração de diferentes representações na conjetura inicial, o seu papel parece ter sido mais determinante não só para a expressão da generalização, como também para a compreensão das relações matemáticas exploradas. A diferenciação dos propósitos dos diferentes tipos de representação é também um aspeto que poderia ser considerado na conjetura inicial.

O quarto e último aspeto a ter em conta na reformulação da conjetura inicial prende-se com as tarefas e sequências de tarefas realizadas. Tendo em conta a metodologia de experiência de ensino e o carácter contínuo de construção e reformulação de tarefas ao longo do estudo, algumas considerações podem tecer-se. Este estudo demonstra como determinadas características das tarefas foram condicionantes para a expressão da capacidade de generalização dos alunos e essas características não tinham sido consideradas à priori na definição da conjetura. Assim, uma reformulação da conjetura inicial terá de ter em conta essas características das tarefas. A organização das tarefas em sequências parece ter sido adequada, mas, considerando os resultados apresentados, uma reformulação da conjetura poderia considerar de forma mais explícita a gradual exploração de níveis de generalização, de pensamento relacional/funcional e da utilização dos diferentes tipos de representação.

Relativamente à dimensão pedagógica da conjetura, constata-se a sua validade e a pertinência da construção de uma cultura de sala condicente com uma perspetiva dialógica da aprendizagem (Wells, 2000) e com uma metodologia de ensino-aprendizagem de natureza exploratória (Baxter & Williams, 2010; Canavarro, 2011; Oliveira et al., 2013; Ponte, 2005; Stein et al., 2008). No entanto, refira-se que o estudo realizado não permitiu recolher dados explícitos dos desempenhos individuais dos alunos e, consequentemente, da sua evolução individual. Este facto justifica-se mais pelas opções tomadas em termos da recolha de dados do estudo e não tanto pelas características da metodologia de ensino-aprendizagem assumida.

Concluindo, a conjetura que orientou a condução da experiência de ensino, nas suas dimensões de conteúdo e pedagógica, parece ter sido adequada para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Assim, releva-se o papel central da generalização e da sua representação para o desenvolvimento do pensamento algébrico e a importância dos contextos de promoção do pensamento relacional e do pensamento funcional. Para além disso, reconhece-se a particular dependência com as opções pedagógicas assumidas relevando a importância de uma metodologia de ensino-aprendizagem de natureza exploratória. No entanto, e como é característico da metodologia de investigação adotada, os resultados apresentados poderiam levar a uma reformulação da conjetura inicial nos aspetos já enunciados.

8.3. Contributos e limitações do estudo

Nesta secção procurar-se-á discutir algumas contribuições do estudo realizado para o ensino da matemática e o desenvolvimento curricular, assim como apontar algumas das suas limitações.

Tendo em conta o nível de escolaridade onde se realizou o estudo, a primeira contribuição que poderá revelar relaciona-se com a pertinência de estudos desta natureza que demonstrem como é possível o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos destas idades. Como investigações recentes já demonstraram, os alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico são capazes de pensar algebricamente (e.g. Blanton & Kaput, 2005; Carpenter et al., 2003; Carraher et al., 2007; Radford, 2011; Warren & Cooper, 2005), o que é evidenciado também neste estudo.

Este estudo demonstra ainda que é possível introduzir os conteúdos algébricos no currículo da escola elementar, em particular no 4.º ano de escolaridade, sem que isso implique uma extensão do currículo existente. De facto, os conteúdos matemáticos explorados estavam integrados no currículo do 4.º ano (ME, 2007), sendo maioritariamente aritméticos, os quais foram explorados em maior profundidade, de forma a desenvolver a capacidade de generalização (Kaput et al., 2008). Os conteúdos foram, assim, algebrizados (Carraher et al., 2008), o que permitiu tornar o pensamento algébrico como um *fio condutor curricular* (NCTM, 2000). Constata-se, assim, o carácter potencialmente algébrico da aritmética e como a própria aprendizagem da aritmética poderá ser aprofundada e enriquecida através desta abordagem (Cai & Carraher & Schliemann, 2007; Knuth, 2005).

Este estudo revela ainda contributos para o ensino relacionados com os níveis de desempenho observados nos alunos. De facto, os resultados mostram níveis de generalização, de pensamento relacional e funcional e da utilização dos diferentes tipos de representação mais usuais em alunos de anos mais avançados. Os desempenhos dos alunos deste estudo salientam a importância da promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico na escola elementar, alicerçando sempre a aprendizagem na compreensão dos conceitos a partir de contextos e tarefas significativas e, ainda, de metodologias de ensino-aprendizagem condicentes com a promoção dessas aprendizagens.

Outra contribuição deste estudo prende-se com a metodologia de investigação utilizada, a experiência de ensino. Uma metodologia de experiência de ensino permite a condução, em ambientes reais de sala de aula, de um conjunto de pressupostos de ensino, atendendo à diversidade de fatores que são característicos desses ambientes vivos e complexos. Estes pressupostos definidos na conceção de uma conjetura relacionam fortemente os aspetos de conteúdo e pedagógicos e, por isso, resultam num retrato real do que acontece na complexidade da sala de aula. Se, por um lado, a definição dessa conjetura permite traçar pontos de partida para a realização do estudo, por outro lado, a sua própria natureza de constante construção permite uma evolução sistemática do que foi conjeturado, sempre em estreito dialogo com a realidade de sala de aula. É, assim, um contributo válido no que respeita à produção de conhecimento científico suportado pela evidência da prática e que tem como objetivo a melhoria da aprendizagem dos alunos (Bell, 2004; DBRC, 2003; Kelly, 2003; Molina et al., 2007).

Para além das contribuições referidas, este estudo apresenta algumas limitações sobre as quais é importante refletir. A primeira limitação identificada prende-se com a opção efetuada em termos de análise dos dados. Tendo em conta o volume de dados recolhidas, a dificuldade da sua seleção conduziu a opções que podem condicionar uma compreensão mais completa da experiência de ensino realizada. A este respeito salienta-se o facto de, das 42 tarefas realizadas em aula, apenas nove serem apresentadas neste estudo. De facto, a análise feita para cada uma dessas nove tarefas foi bastante pormenorizada e rica, mas a mesma poderá ser considerada insuficiente tendo em conta a dimensão dos dados recolhidos. Desta forma, tendo consciência desta limitação, a opção foi no sentido de apresentar tarefas que fossem ilustrativas do processo, nas diferentes sequências realizadas, e que permitissem traçar uma evolução da capacidade de generalização dos alunos de forma mais incisiva, não apresentando um volume de dados demasiado extenso que pudessem dificultar a compreensão dessa evolução.

Outra limitação prende-se ainda com as opções metodológicas assumidas. Como foi referido, a dimensão individual da aprendizagem não é apresentada neste estudo, estando o mesmo mais direcionado para a abordagem em pares ou pequenos grupos e para a dimensão da turma enquanto entidade coletiva. Assim, os desempenhos dos alunos individuais não são muito salientes, particularmente para aqueles cuja participação nas discussões coletivas não era muito evidente. Seria, então, pertinente conduzir estudos desta natureza onde se pudessem abarcar essas diferentes dimensões, desejavelmente com equipas de investigadores que, colaborativamente, desenvolvessem um projeto de investigação com o mesmo objetivo.

Em conclusão posso referir que, para mim, este estudo significou uma imensa fonte de aprendizagem, quer enquanto professora do 1.º ciclo, quer enquanto investigadora interessada em perceber as questões da aprendizagem matemática dos alunos deste nível de ensino. A pertinência e potencialidade de um tema amplo como o desenvolvimento do pensamento algébrico e a sua exploração em sala de aula através de uma abordagem de natureza exploratória, e ainda a metodologia de investigação adotada, foram motivos de um intenso investimento, muita dedicação e bastantes dificuldades e angústias. De facto, muitas das aprendizagens que advém da realização deste estudo são de difícil descrição e outras serão ainda motivo de continuada reflexão, mesmo após a conclusão da escrita desta dissertação, constituindo, certamente, um forte contributo para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Referências

APM (1998). Fósforos na construção de triângulos. *Investiga e Partilha*. Retirado de http://www.apm.pt/ip/anteriores/out98/act_2c.html.

Arcavi, A. (1994). Symbol-sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 25*(2), 42-48.

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.* (Tese de Doutoramento). Braga: Universidade do Minho.

Barbosa, A. (2011). Generalização de padrões em contextos visuais: um estudo no 6.º ano de escolaridade. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte (Eds.). *Ensino e aprendizagem da álgebra.* (pp. 327-345). xxx

Barbosa, A. (2013). O contributo da visualização no desenvolvimento do raciocínio funcional. In L. Santos (Ed.), *Raciocínio matemático* (pp. 51-80). Covilhã: SPIEM.

Baroody, A. J. & Ginsburg, H. P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sign. *The elementary School Journal, 84*(2), 198-212.

Bastable, V. (2007). Reasoning algebraically about operations: Developing early algebraic thinking by examining the generalizations that underlie young student's mathematical thinking. What do teachers and those who prepare teachers need to understand? In D. K. Pugalee, A. Rogerson, & A. Schnook (Eds.), *Proceedings of the 9th international conference of mathematics education in a global community* (pp. 60-63). Charlotte, NC: Center for Mathematics, Science & Technology Education.

Baxter, J. A. & Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: managing the dilemma of telling. *Journal Mathematics Teacher Education, 13*, 7-26.

Bell, P. (2004). On the theoretical breadth of design-based research in education. *Educational Psychologist, 39*(4), 243-253.

Blanton & Kaput (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-24). New York: Springer.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom – Transforming Thinking, Transforming Practice.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36(*5), 412-446.

Blanton, M., Schifter, D., Inge, V., Lofgren, P., Willis, C., Davis, F. & Confrey, J. (2007). Early algebra. In V. J. Katz (Ed.). *Algebra, Gateway to a technological future* (pp. 7-12). Washington, D. C.: The Mathematical Association of America.

Blanton, M.; Levi, L.; Crites, T. & Doughterty, B. J.; (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de Matemática: olhares sobre o trabalho do professor. In J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Eds.) *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 13-43). Setúbal: IPS.

Boavida, A. M. & Menezes, L. (2012). Ensinar Matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e raciocinar: contornos e desafios. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 287-295). Portalegre: SPIEM.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos números.* Porto: Porto Editora.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 125-141.

Britt, M. S. & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: a pathway for learning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 137-159). New York: Springer.

Brizuela, B. M., Carraher, D. & Schliemann, A. D. (2000). Mathematical notation to support and further reasoning ("to help me think of something"). *Symposium presentation, NCTM Research Pre-session Meeting, Chicago, IL*. Retirado de: http://earlyalgebra.terc.edu/our_papers/2000/Brizuela_et_all_NCTM2000.pdf.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge: Belknap Press of Harvard University Press.

Cai, J. & Knuth, e. J. (2005). Introduction: The development of students' algebraic thinking in earlier grades from curricular, instructional and learning perspectives. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 37*(1), 1-4.

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática dos primeiros anos. *Quadrante, 16*(2), 81-118.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Canavarro, A. P., Oliveira, H. & Menezes, L. (2012).Práticas de ensino exploratório da Matemática: o caso de Célia. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255-265). Portalegre: SPIEM.

Carpenter, T. P. & Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades (Research Report #002)*. Madidon, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. (Retirado de http://ncisla.wceruw.org/publications/reports/RR-002.PDF.)

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in the elementary school: developing relational thinking. *ZDM, 37* (1), 53-59.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*, 3-22.

Carraher, D., Brizuela, B. & Schliemann, A. D. (2000). Bringing out the algebraic character of arithmetic. Instantiating variables in addition and subtraction. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the XXIV Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 145-152). Hiroshima, Japan: PME.

Carraher, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2001). Can Young Students Operate on Unknowns? In *Proceedings of the XXV Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 130-140). Utrecht, The Netherlands: PME.

Carraher, D., Schliemann, A.D., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Carraher, D.W., Schliemann, A.D. & Schwartz, J. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput. D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 235-272). New York: Lawrence Erlbaum Associates & NCTM.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In R. Lesh & A. Kelly, *Handbook of research methodologies for science and mathematics education* (pp. 341-385). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1991). Analogies from the philosophy and sociology of science for understanding classroom life. *Science Education, 75*(1), 23-44.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28(*3), 258-277.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P., Gresalfi, M., & Hodge, L. L. (2009). A design research perspective on the identities that students are developing in mathematics classrooms. In B. Schwarz, T. Dreyfus & R. Hershkowitz (Eds.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 223-243). New York: Routledge,

Cobb, P., Wood, T. & Yackel, E. (1989). Young children's emotional acts while doing mathematical problem solving. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 117-148). New York: Springer.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. New York: Routledge.

Collins, A., Joseph, D. & Bielaczyc, K. (2004). Design research: theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 15-42.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp.135-151). New York: Cambridge University Press.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational studies of mathematics, 26*, 135-164.

Cooper, Rixon & Burnett (1993). Students' understanding of the mathematical concepts of equal and equivalence. In *Contexts in mathematics education: Proceedings of the sixteenth Annual Conference of the Mathematic Education Research Group of Australasia* (pp. 201-203). Brisbane: MERGA.

Cooper, T. & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187-214). New York: Springer.

Davidenko, S. (1999). Building the concept of function from students' everyday activities. In B. Moses (Ed.), *Algebra thinking, grades K - 12*. Reston, VA: NCTM.

Design-Based Research Collective (2003). Design-Based Research: an emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32(*1), 5-8.

diSessa, A. A. & Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *Journal of the learning sciences, 13*(1), 77-103.

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: comments and reflections. *ZDM Mathematics Education, 40,* 143-160.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Eisenmann, P. (2009). A contribution to the development of functional thinking of pupils and students. *The teaching of mathematics, 7*(2), 73-81.

Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 194-229.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing – Promoting actions: how classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(4), 308-345.

Escolar Superior de Educação de Lisboa (2006). *Cadeia de tarefas para o ensino das grandezas e medidas. Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1.º do Ensino Básico*. Retirado de http://dc622.4shared.com/doc/5DBZFYPe/preview.html

Escola Superior de Educação de Lisboa (s/d). *Pensamento algébrico nos primeiros anos. Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.* Retirado de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/060_pensamento%20_algebrico.pdf.

Escola Superior de Educação: Instituto Politécnico de Setúbal (s/d). *Tarefa Separando cubos. Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico – 2010-2011*. Retirado de http://projectos.ese.ips.pt/pfcm/wp-content/uploads/2010/02/Separando-cubos-2010-11.pdf

Falkner, K. P.; Levi, L.; & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: a foundation of algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), 232-236.

Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: Is the concept of a variable so difficult for students to understand? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 49–65). Honolulu: PME.

Fujii, T. & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: seventieth yearbook* (pp. 127-149). Reston, VA: NCTM.

García-Luz, J. A. & Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. In *Proceeding of the 22th Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 329-336). University of Stellenbosh: PME.

Geer, C. P. (1992). Exploring patterns, relations and functions. *Arithmetic Teacher, 39*, 19-21.

Goldin, A. G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-219). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning and problem solving in Mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

Goldin, G. A. & Herscovics, N. (1991). The conceptual-representational analysis of children's early arithmetic. In: R. G. Underhill (Ed.) *Proceedings of the thirteenth annual meeting of North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. I, pp. 118-124). Blacksburg, Virginia: Division of Curriculum & Instruction.

Goldin, G. A. & Kaput, J. J. (1996). A join perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe & P. Nesher (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-431). Mahwah, New Jersey: LEA.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 111-129.

Gravemeijer, K. & van Eerde (2009). Design research as means for building a knowledge base for teachers and teaching in Mathematics. *The Elementary School Journal, 109*(5), 510-524.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 45-85). London: Routledge.

Guba, E. G. & Lincoln, Y. S. (1989). *Fourth generation evaluation*. Beverly Hills, CA: Sage.

Harel, G. & Tall, D. (1989). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics, 11*(1), 38-49.

Herbst, P. & Chazan, D. (2009). Methodologies for the study of instruction in mathematics classrooms. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 29*(1), 11-32.

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(2), 145-165.

Jacobs, Franke, M. L., V. R., Carpenter, P. T., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 258-288.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahawah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In Kaput, J. J.; Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (Eds.). *Algebra in the early grades* (pp. 5 -17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). (2008). *Algebra in the early grades*. New York: Lawrence Erlbaum Associates & NCTM.

Kelly, A. E. (2003). Research as design. *Educational Researcher*, *32*(1), 3-4.

Kennedy, N. S. (2009). Towards a dialogical pedagogy: some characteristics of a community of mathematical inquiry. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *5*(1), 71-78.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 317-326.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: what is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139 – 151.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, *16*(1), 5-26.

Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: perspectives for research and teaching. In J. Cai & E. Knuth (Eds.) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 579-593). New York: Springer.

Knuth, E. J.; Stephens, A. C.; McNeil, N. M.; & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(4), 297-312.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school*, *7*(4), 23-26.

Lampert, M. & Cobb, P. (2003). Communication and language. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *Research Companion to NCTM's Standards*. Reston, VA: NCTM.

Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics education research journal, 18*(3), 3-28.

Lannin, J.; Ellis, A. B. & Elliott, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8.* Reston, VA: NCTM.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The Future of Teaching and Learning of Algebra*. (pp. 73-96). Boston: Kluwer.

Malara, N. A. (2012). Generalization process in the teaching/learning of algebra: students behaviours and teacher role. B. Maj-Tatsis, K. Tatsis (Eds), *Proceedings CME Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 57- 92). Rzeszów: Wydawnictwo Uniwerytetu Rzeszowskiego.

Marcelo, C., Parrilla, A., Mingorance, P., Estebaranz, A., Sánchez, M. V. & Llinares, S. (1991). *El estudio de caso en la formación del profesorado y la investigación didáctica*. Sevilla: Universidad de Sevilla.

Martinez, M. & Brizuela, B. M. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *Journal of mathematical behaviour, 25*, 285-298.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches of algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.). *Algebra in the early grades.* (pp. 57-94). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J., Drury, H. & Bills, L. (2007). Studies in the zone of proximal awareness. In J. Watson & K. Beswick (Eds.) *Proceedings of the 30th annual conference of Mathematics Education Research Group of Australasia*. (Vol. 1, pp. 42-58). Adelaide: MERGA.

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. London: Paul Chapman Publishing.

Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. P. (2013). Processos de raciocínio matemático em alunos do 9.º ano: generalização em números reais e inequações. In L. Santos (Ed.), *Raciocínio matemático* (pp. 235-253). Covilhã: SPIEM.

Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1.º ciclo*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Mendes, F., Brocardo, J., Delgado, C. & Torres, F. (2010). *Números e operações – 3.º ano. Materiais de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação. Retirado de: http://area.dgidc.minedu.pt/materiais_NPMEB/019_020_Sequencia_NumeroseOperacoes_NPMEB_1c3(actualizado22Jun2010).pdf.

Merrian, S. B. (1991). *Case study research in education. A qualitative approach*. S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Merrian, S. B. (2002). Introduction to qualitative research. In S. B. Merrian & Associates (Eds.), *Qualitative research in practice: examples for discussion and analysis* (pp. 3-17). San Francisco: Jossey-Bass.

Mestre, C. (2009). As tarefas de ensino e a aprendizagem dos números decimais. In C. Costa, E. Mamede & F. Guimarães (Orgs.), *Números e Estatística: Reflectindo o presente, perspectivando o futuro*.Vila Real: SEM-SPCE.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Molina, M & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Third graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 30* (1), 61-80.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*, 135 - 156.

Molina, M. & Ambrose, R. C. (2006). Fostering relational thinking while negotiating the meaning of the equals sign. *Teaching children mathematics,* 111-117.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). Teaching experiments within design research. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences, 2*(4), 435-440.

Monteiro, A. P., Loureiro, C., Nunes, F. & Gonçalves, H. (2007). *Multiplicação e divisão – Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos*. Lisboa: Escola Superior da Educação de Lisboa.

Moss, J. & Beatty, R. (2006). Knowledge building and knowledge forum: grade 4 students collaborate to solve linear generalizing problems. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings of 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 193-199). Prague: PME.

Moss, J. & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai & E. Knuth (Eds.) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277-301). New York: Springer.

Moss, J., Beaty, R., McNab, S. L., & Eisenband, J. (2005). *The potential of geometric sequences to foster young students' ability to generalize in Mathematics*. http://www.brookings.edu/gs/ brown/algebraicreasoning.htm.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Retirado de http://www.nctm.org/standards/.

Oliveira, H., Menezes, L. & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referencia. *Quadrante, 22*(2), 29-53.

Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In Orton, A. *Pattern in the teaching and learning of mathematics*. London: Cassel.

Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 3-19). Rotterdam: Sense.

Pimentel, T. & Vale, I. (2009). A descoberta de padrões no desenvolvimento do Cálculo mental: uma experiência com professores do 1.º ciclo. In C. Costa, E. Mamede & F. Guimarães (Orgs.), *Números e Estatística: Reflectindo o presente, perspectivando o futuro*.Vila Real: SEM-SPCE.

Pimentel, T., & Vale, I. (2012). Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. *Quadrante, 21*(2), 29 – 50.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interações, 22*,196-216.

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2009). O novo programa de Matemática: uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática, 105*, 2-6.

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. ME: DGIDC.

Ponte, J. P., Silvestre, A. I., Garcia, C. & Costa, S. (2010). *O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade direta pela exploração de regularidades. Tarefas para o 1.º e o 2.º ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: IE e UBI.

Pourtois, J. & Desmet, H. (1992). *La recogida y el análisis de la información. In epistemología e instrumentación en ciencias humanas* (pp. 129-145). Barcelona: Editorial Herder.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A. (Eds.), P*roceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 2-21). Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education, 40*, 83-96.

Radford, L. (2010). Elementary forms of algebraic thinking in young students. In M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 73-80). Brasil: PME.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303-322). New York: Springer.

Radford, L. (2012). *Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. In Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (*pp. 675-694). Seoul: ICME.

Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7-44.

Rivera, F. D. (2006). Changing the face of arithmetic: Teaching children algebra. *Teaching Children Mathematics, 12*(6), 306-311.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2007a). Abduction-induction (generalization) processes of elementary mayors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematics Behavior, 26*, 140-155.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2007b). Abduction in pattern generalization. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.) *Proceedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 97-104). Seoul: PME.

Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In J. Cai & E. Knuth (Eds.) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 44-69). New York: Springer.

Santos, M. M. P. (2008). *A generalização nos padrões: um estudo no 5.º ano de escolaridade*. (Tese de Mestrado). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W., & Brizuela, B. (2003). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice. Studies in Mathematical Thinking and Learning Series*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (2001b). Learning mathematics as developing a discourse. In R. Speiser, C. Maher, C. Walter (Eds.), *Proceedings of 21st Conference of PME-NA* (pp. 23-44). Columbus, Ohio: Clearing House for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of mathematics teacher education*, *5*, 205-233.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *ZDM, 33*(4), 123-132.

Smith, E. (2003). Statis and change: Integrating patterns, Functions, and algebra throughout the k-12 curriculum. In J. Kilpatrick, W. Martin, & D. Shifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp.136-150). Reston, VA: NCTM.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early years* (pp. 133-160). Reston, VA: NCTM.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20* (2), 147-164.

Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: illustrations and implications. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 177-194). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. Kelly, & R. Lesh (Edits.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3,* 268–275.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Stephens, A. C., Isler, I., Marum, T., Blanton, M. L., & Knuth, E. J., Gardiner, A. M., (2012). From recursive pattern to correspondence rule: developing students' abilities to engage in functional thinking. In Van Zoest, L. R., Lo, J., J. & Kratky, J. L. (Eds.) *Proceedings of the 34th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 821-828). Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Stephens, M. (2006). Describing and exploring the power of relational thinking. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces. Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 479-486). Canberra: MERGA.

Stephens, M., & Wang, X. (2008). Investigating some junctures in relational thinking: A study of year 6 and year 7 students from Australia and China. *Journal of Mathematics Education, 1*(1), 28–39.

Tabach, M., & Friedlander, A. (2008). The role of context in learning beginning algebra. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook* (pp. 223-232). Reston, VA: NCTM.

Tanish, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*, 206-223.

Vale, I. (2009). Das tarefas com padrões visuais à generalização. In J. Fernandes, H. Martinho & F. Viseu (Org.), *Actas do XX Seminário de Investigação Matemática* (pp. 35-63). Viana do Castelo: APM.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Warren, E. (2005). Young children´s ability to generalize the pattern rule for growing patterns. In H. L. Chick & J. L. Vincent, (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305-312). Melbourne: PME.

Warren, E. & Cooper, T. (2005). Young children's ability to use the balance strategy to solve for unknowns. *Mathematics education research journal, 17*(1), 58-72.

Warren, E. & Cooper, T. (2009). Developing Mathematics understanding and abstraction: the case of equivalence in the elementary years. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 76-95.

Warren, E.; Miller, J. & Cooper, T. J. (2011). An exploration of young students' ability to generalise functions tasks. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer, & S. Thornton (Eds.), *Proceedings of the 34th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia and the Australian Association of Mathematics Teachers* (pp. 752-759). Adelaide: AAMT and MERGA.

Wells, G. (2000). Dialogic inquiry in education: Building on the legacy of Vygotsky. In C. D. Lee, & P. Smagorinsky (Eds.), *Vygotskian perspectives on literacy research* (pp. 51–85). New York: Cambridge University Press. Retirado de https://www.csun.edu/~SB4310/601%20files/dialogicinquiry.pdf

Willoughby, S. S. (1999). Function from kindergarten through sixth grades. In B. Moses (Ed.). *Algebra thinking, grades K - 12*. Reston, VA: NCTM.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Yin, R. K. (1989). *Case study research design and methods*. Londres: Sage Publications.

Anexos

Anexo 1

[redacted], 7 de Outubro de 2010

Exmo. Sr.
Presidente [redacted]
C/ Conhecimento da Sra. Diretora
[redacted]

Assunto: Pedido de autorização para a realização de um estudo de investigação em sala de aula

Eu, Célia Maria Martins Vitorino Mestre, docente pertencente ao quadro deste agrupamento a usufruir de licença sabática, no presente ano lécito; venho por este meio informar V. Exa. que me encontro a realizar uma investigação no âmbito do meu trabalho de Doutoramento em Educação, na área de especialização de Didáctica da Matemática, pelo Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, sob orientação da Professora Doutora Hélia Oliveira. Esta investigação tem como objeto o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico e a recolha de dados decorre no âmbito de uma experiência de ensino em sala de aula onde se implementam tarefas e se procuram analisar as aprendizagens e dificuldades dos alunos da turma, e, em particular, a evolução de três alunos como estudos de caso. O estudo segue uma metodologia qualitativa e interpretativa.

Desta forma, contactei, de modo informal, a professora Susana [redacted], professora titular da turma do 4º[redacted] da [redacted], que se disponibilizou a ser participante neste estudo, de acordo com as condições seguintes:

i. Participar na planificação da cadeia de tarefas sobre pensamento algébrico para implementação na turma;
ii. Implementar as tarefas na turma;
iii. Participar na reflexão sobre a implementação das tarefas e consequentes aprendizagens e dificuldades manifestadas pelos alunos.

Neste sentido, venho solicitar a V. Exa. autorização para a realização deste estudo de investigação na turma do 4º[redacted] da professora Susana [redacted], com a minha presença e participação em algumas aulas de Matemática e para a recolha dos dados com registos áudio e vídeo. Declaro que as imagens daí resultantes não serão divulgadas nem serão utilizadas para quaisquer outros fins.

Declaro ainda que, caso seja favorável a V. apreciação, solicitarei à professora Susana [redacted] uma breve reunião com os encarregados de educação dos alunos da turma para apresentação do trabalho de investigação e solicitação das autorizações para os registos vídeo e áudio das aulas referidas.

Encontrando-me ao dispor para quaisquer esclarecimentos adicionais, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

A professora

____

(Célia Mestre)

Anexo 1

Autorizações

Autorização

Exmo. Sr. Encarregado de Educação
Do Aluno (a) ________________________________
Da turma do 4.º [redacted] da professora Susana [redacted]

Venho, por este meio, informar V. Exa. que me encontro a desenvolver uma investigação no âmbito do meu trabalho de Doutoramento em Educação, na área de especialização de Didáctica da Matemática, pelo Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, sob orientação da Professora Doutora Hélia Oliveira. Esta investigação tem como objeto o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico e a recolha de dados decorre no âmbito de uma experiência de ensino em sala de aula onde se implementam tarefas e se procuram analisar as aprendizagens e dificuldades dos alunos da turma.

Neste sentido, propus-me realizar este trabalho na turma da professora Susana [redacted], preparando em conjunto com a professora tarefas que serão aplicadas em algumas aulas de Matemática ao longo do ano lécito, de acordo com a programação anual desta área curricular. Nessas aulas procederei à recolha dos dados usando meios áudio e vídeo e, adicionalmente, serão realizadas entrevistas a alguns alunos em momentos a agendar. Desta forma, solicito a V. Exa. autorização para a recolha dos dados nos formatos referidos, declarando que as imagens e som daí resultantes não serão divulgados nem serão utilizados para quaisquer outros fins e que preservarei o anonimato dos alunos envolvidos.

Encontrando-me ao dispor para quaisquer esclarecimentos adicionais, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

12 de Outubro de 2010

A professora

____
Célia Mestre
[redacted]

Eu, ____, encarregado de educação do(a) aluno(a) ____________________________________ da turma do 4.º [redacted], declaro autorizar o meu educando a participar na investigação da professora Célia Mestre no âmbito da sua tese de Doutoramento.

____/____/ 2010

____
(Assinatura do encarregado de educação)

Anexo 2

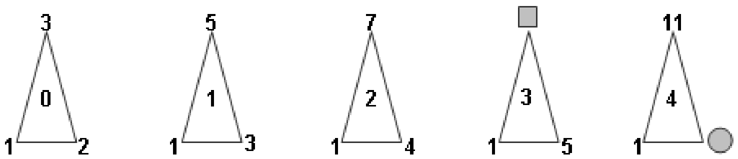
Avaliação Diagnóstica	**EB1** **Ficha de Avaliação Diagnóstica de Matemática – 4.º ano**
	Nome: _________________________________ Data: ___/____/____

Lê os enunciados com muita atenção, pensa bem e depois responde. No final verifica tudo atentamente.

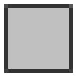
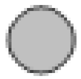
1. Assinala com X a opção correcta: V (verdadeiro) ou F (falso) e justifica.

	V	F	Justificação
24 + 37 = 37 + 24			
46 + 27 - 27 = 27			
♣ X 1 = ♣			
12 X 5 = 10 X 5 + 12			
♠ + 0 = ♠			

2. Observa com atenção a sequência:



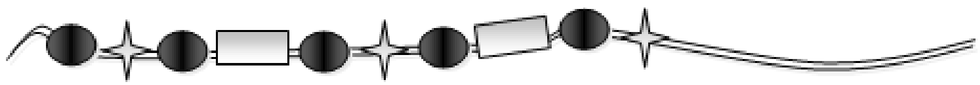
a. Escreve o número que corresponde a cada um dos símbolos:

 _______  _______

b. Diz como descobriste esses números.

Teste de Diagnóstico

3. A Marta está a fazer uma pulseira e já colocou no fio as peças que tu vês na figura.



a. Continuando o padrão, desenha as três peças seguintes no fio da pulseira.

b. Desenha, no espaço abaixo, a forma da décima quarta (14º) peça da pulseira.

   i. Em que posição esta peça volta a aparecer? Como descobriste?

c. Desenha, no espaço abaixo, a forma da décima sexta (16º) peça da pulseira.

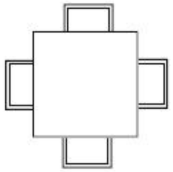
   i. Em que posição esta peça volta a aparecer? Como descobriste?

d. Será que a vigésima primeira (21º) peça pode ser esta  ? Porquê?

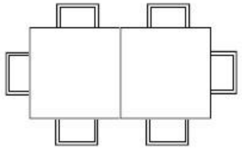
4. Na aula do Frederico os alunos estiveram a pintar desenhos com guaches. Para secarem, a professora pendurou-os com molas numa corda, como se vê na figura seguinte.

   a. Quantas molas foram necessárias para pendurar os 5 desenhos? __________
   b. E se fossem 6 desenhos, quantas molas precisaria? __________
   c. E se fossem 10 desenhos, quantas seriam as molas? __________
   d. E se fossem 100 desenhos, quantas seriam as molas? __________
   e. Explica como podes descobrir o número de molas necessário para pendurar qualquer quantidade de desenhos.

5. A mãe da Marta trabalha num restaurante. O chefe pediu-lhe que organizasse mesas para um jantar com 14 pessoas. A mãe da Marta começou a colocar as mesas quadradas e reparou que numa mesa poderiam estar sentadas 4 pessoas.



Se juntasse 2 mesas, poderia sentar 6 pessoas.



   a. Seguindo a mesma regra, quantas pessoas poderia sentar se juntasse 4 mesas em fila? Mostra como encontraste a resposta.
   b. Para sentar as 14 pessoas que iam jantar, quantas mesas precisaria juntar a mãe da Marta? Mostra como encontraste a resposta.
   c. Consegues descobrir quantas pessoas poderiam sentar-se se a mãe da Marta juntasse 20 mesas? Explica como pensaste.
   d. O patrão da mãe da Marta disse que estavam sentadas 33 pessoas no restaurante e que estavam organizadas 15 mesas. A mãe da Marta disse que isso não era possível. Por que razão a mãe da Marta terá referido isso?

Anexo 3 - Tarefas

Tarefa 1

"Regularidades, números pares e múltiplos de 5 e 10"[7]

Parte I

Observa com atenção a tabela[8] que te foi distribuída.
O que podes afirmar sobre os números da tabela?
Regista aqui as descobertas que fizeres com o teu grupo.

Parte II

Usa lápis de cores diferentes.

1. Pinta da mesma cor todos os números que são múltiplos de 5, ou seja, começa no 5 e vai pintando todos os números de 5 em 5.
   a. O que descobriste sobre os números de 5?

----

2. Pinta de outra cor todos os números que são múltiplos de 10, ou seja, começa no 10 e vai pintando todos os números de 10 em 10.
   a. O que descobriste sobre os múltiplos de 10?

----

3. Há números que foram pintados de duas cores.
   a. Quais são esses números?
   b. Por que razão isso aconteceu?

Parte III

Usa uma cor diferente das anteriores.

1. Pinta todos os números pares (múltiplos de 2) da tabela.
   a. O que descobriste sobre esses números?

----

2. Há números que ficaram pintados de três cores.
   a. Quais são?
   b. Consegues explicar porquê?

---

[7] Adaptada de Mendes, Brocardo, Delgado & Torres (2010).
[8] Foi distribuída aos alunos uma tabela de números de 1 a 50.

Tarefa 2

"Regularidades nas tabuadas"[9]

1. Observa com atenção a tabuada do 3[10] (os primeiros dez produtos).
2. O que há de curioso nesta tabuada? Descobre algumas regularidades e regista-as.
3. Continua a tabuada do 3, calculando 11x3, 12x3, 13x3…
4. As regularidades que descobriste mantêm-se? Porquê?

0x3=0 1x3=3 2x3=6 3x3=9 4x3=12 5x3=15 6x3=18 7x3=21 8x3=24 9x3=27 10x3=30 11x3= 12x3= 13x3= 14x3= 15x3= 16x3= 17x3= 18x3= 19x3= 20x3= 21x3=	

---

[9] Adaptada de Mendes (2012).
[10] Cada grupo de alunos trabalhou uma sequência de múltiplos diferente: 3, 6 e 9.

Tarefa 3

“Descobrindo regularidades I”

O grupo do João Vago, do Marco e do Daniel descobriu a seguinte regularidade na tabuada do 3:

“Nos produtos de 4x3 e 14x3, o algarismo das unidades não mudou.”

0x3=0 1x3=3 2x3=6 3x3=9 **4x3=12** 5x3=15 6x3=18 7x3=21 8x3=24 9x3=27 10x3=30 11x3=33 12x3=36 13x3=39 **14x3=42** 15x3=45 16x3=48 17x3=51 18x3=54 19x3=57 20x3=60 21x3=63 22x3=66 23x3=69 24x3=72 25x3=75 26x3=78 27x3=81	1. Procura outras situações onde isso aconteça e regista-as. 2. Consegues explicar porque é que isso acontece? Verifica se essa explicação é válida para todas as situações que encontraste.

Tarefa 4

“Descobrindo regularidades II”

Repara no produto destacado a cor vermelha nas três tabuadas seguintes.

0x3=0	0x6=0	0x9=0
1x3=3	1x6=6	1x9=9
2x3=6	2x6=12	2x9=18
3x3=9	3x6=18	3x9=27
4x3=12	4x6=24	4x9=**36**
5x3=15	5x6=30	5x9=45
6x3=18	6x6=**36**	6x9=54
7x3=21	7x6=42	7x9=63
8x3=24	8x6=48	8x9=72
9x3=27	9x6=54	9x9=81
10x3=30	10x6=60	10x9=90
11x3=33	11x6=66	11x9=99
12x3=**36**	12x6=72	12x9=108
13x3=39	13x6=78	13x9=117
14x3=42	14x6=84	14x9=126
15x3=45	15x6=90	15x9=135

1. Consegues explicar por que é que esse produto é comum às três tabuadas?

----

2. Procura outros produtos comuns a duas ou três das tabuadas apresentadas e explica as relações que existem.

Anexo 3 - Tarefas **Sequência I**

Tarefa 5

"De onze em onze"

1. Observa com atenção a sequência seguinte, descobre algumas regularidades e regista-as.

0x11=0 1x11=11 2x11=22 3x11=33 4x11=44 5x11=55 6x11=66 7x11=77 8x11=88 9x11=99	

----

2. Continua a sequência para mais alguns produtos. As regularidades mantêm-se?

Tarefa 6

"Construir a tabuada do 12"

1. Continua a sequência. Mostra de duas formas diferentes como calcular os produtos pedidos.

0x12=0 1x12=12	
2x12=	
3x12=	
4x12=	
5x12=	
6x12	

----

2. Mostra duas formas diferentes de calcular os produtos pedidos.

15x12=	
20x12=	
35x12=	
46x12=	

Tarefa 7

"Sandes para o lanche"[11]

A Ana preparou 48 sandes para um lanche com alguns amigos. No fim do lanche, verificaram que toda a gente tinha comido igual número de sandes e que não tinha sobrado nenhuma. Quantas pessoas poderiam ter estado no lanche e quantas sandes inteiras terão comido cada uma?

[11] Retirada de Monteiro, Loureiro, Nunes & Gonçalves (2007).

Tarefa 8

"Castanhas para todos I"

Para comemorar o São Martinho, a Maria decidiu levar castanhas para a escola. Ela queria distribuir as castanhas pelos amigos de forma a dar o mesmo número de castanhas a cada um.

1. Pensou em diferentes hipóteses:

a) Se levar apenas 4 castanhas, a quantos amigos as poderia dar?
b) E se levar 8 castanhas?
c) E se levar 12 castanhas?
d) E 16 castanhas?
e) E 20?
f) E 24?

----

2. Observa com atenção os números que obtiveste nas questões anteriores. O que descobriste? Regista as tuas conclusões.

Tarefa 9

"Castanhas para todos II

Na tarefa "Castanhas para todos" descobrimos que os divisores de 4 (1, 2 e 4) também são divisores dos seus múltiplos (8, 12, 16, 20 e 24):

Divisores de 4: **1, 2,** e **4**

Divisores de 8: **1, 2, 4,** e 8

Divisores de 12: **1, 2,** 3, **4,** 6, e 12

Divisores de 16: **1, 2, 4,** 8, e 16

Divisores de 20: **1, 2, 4,** 5, 10, e 20

Divisores de 24: **1, 2,** 3, **4,** 6, 8, 12, e 24

Será que isso acontece com os divisores de outros múltiplos? Investiga.

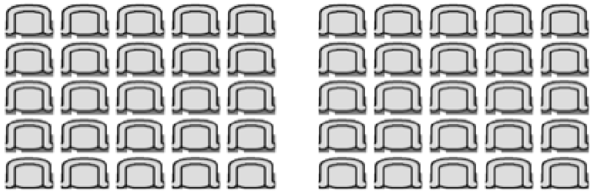
<u>Tarefa 10</u>

"Salas de cinema"[12]

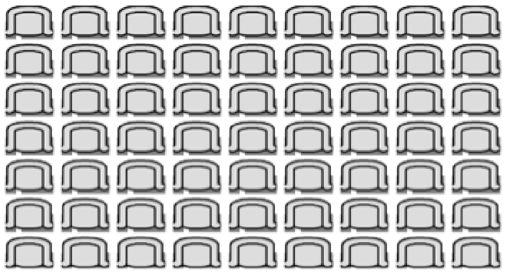
Os cinemas do Fórum X têm várias salas. As imagens seguintes mostram a disposição das cadeiras em três salas.

Para cada uma delas conta o número total de cadeiras, sem contares os lugares um a um. Mostra como pensaste.

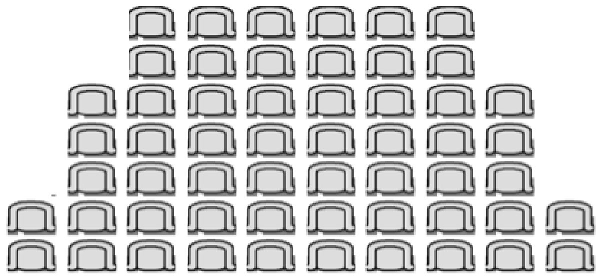
Sala 1



Sala 2



Sala 3



[12] Adaptada de Escola Superior de Educação de Lisboa (2006).

Anexo 3 - Tarefas

Sequência II

Tarefa 11

"Cem cadeiras"[13]

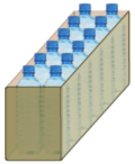
Descobre diferentes maneiras de arrumar 100 cadeiras numa sala de cinema, respeitando a condição de que todas as filas tenham o mesmo número de cadeiras.

[13] Adaptada de Escola Superior de Educação de Lisboa (2006).

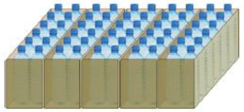
Tarefa 12

"Embalagens de garrafa de água"[14]

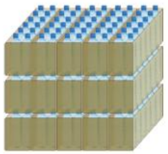
Na semana desportiva da cidade Verde foram realizados jogos de diferentes modalidades. A organização dos jogos disponibilizou aos atletas embalagens de doze garrafas de água cada, como a da figura.



1. Aos jogadores de ténis foram oferecidas as embalagens representadas na figura abaixo. Quantas garrafas de água foram oferecidas? Mostra como pensaste.



2. Aos jogadores de futebol foram oferecidas as embalagens de garrafas de água representadas na figura seguinte. Quantas garrafas de água foram oferecidas? Mostra como pensaste.



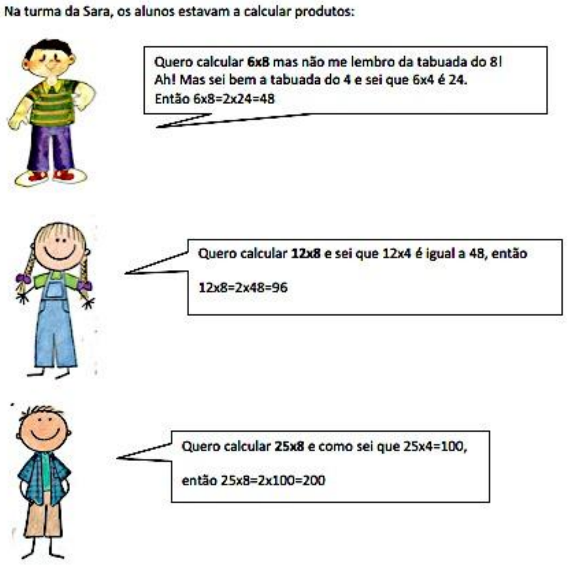
3. Como se esgotaram as embalagens de 12, as águas oferecidas aos jogadores de xadrez vinham em embalagens de 6 garrafas. Foram oferecidas 30 embalagens. Quantas garrafas de água foram oferecidas? Mostra como pensaste.

[14] Adaptada de Mendes, Brocardo, Delgado & Torres (2010).

Anexo 3 - Tarefas

Tarefa 13

“Calcular usando o dobro”



Estes alunos utilizaram a mesma estratégia para calcular produtos diferentes.

Explica essa estratégia.

Usa essa estratégia para calcular os seguintes produtos:

15x2=	6x2=
15x4=	6x4=
15x8=	6x8=
15x16=	6x16=
15x32=	6x32=

Tarefa 14

“A festa de anos da Marta”

A Marta está a fazer uma festa de aniversário. A mãe da Marta fez queques para todos.

1. Para fazer os queques, quantas formas como as da imagem a mãe da Marta precisou?

----

2. Os queques estavam tão gostosos que cada pessoa comeu dois e não sobrou nenhum. Quantas pessoas estavam na festa?

----

3. Para a festa, a mãe da Marta tinha embalagens com 6 copos de plástico cada. Sabendo que cada pessoa usou um copo e não sobrou nenhum, quantas embalagens precisou?

Anexo 3 - Tarefas

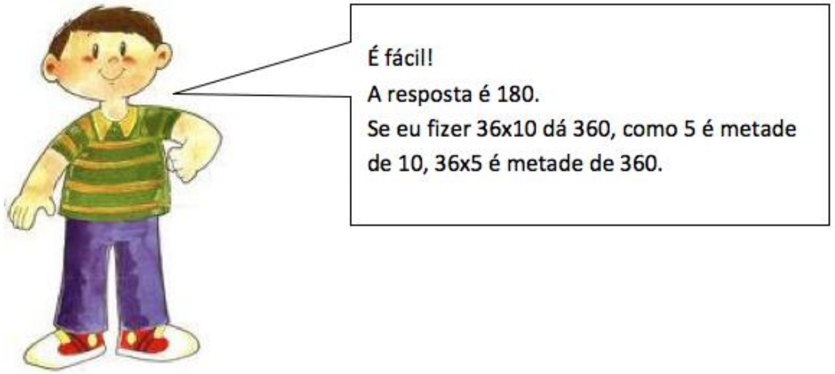
Sequência II

Tarefa 15

“A estratégia do Afonso”

O Afonso quer calcular este produto:

36x5=



1. A resposta do Afonso está correta? Explica a estratégia do Afonso.

----

2. Utiliza a estratégia do Afonso para multiplicar outros números por cinco.

Tarefa 16

“Diferentes estratégias de cálculo”

A professora colocou o seguinte desafio à turma:

- Sem utilizarem o algoritmo da multiplicação calculem **15x12.**

1. Explica como estes alunos resolveram o desafio:

Eu fiz assim:

15x12=15x10+15x2=150+30=180

Estratégia do Pedro

E nós fizemos assim:

15x12=2x15x6=30x6=180

Estratégia do Rui e da Patrícia

2. Calcula **35x12** das duas formas apresentadas:

Estratégia do Pedro	Estratégia do Rui e da Patrícia

Tarefa 17

"Adicionando linhas da tabuada"[15]

E se adicionasses duas linhas da tabuada?

1. Experimenta com a tabuada do 3:
   - Escolhe a segunda linha: **2x3=6**
   - Escolhe a quinta linha: **5x3=15**
   - Adiciona os números relativos às ordens das linhas: 2+5=7
   - Repara na sétima linha da tabuada: **7x3=21**

2. Que relações encontras entre os números dessas três linhas da tabuada?

----

3. Experimenta adicionar outras linhas da tabuada do 3. Regista as relações que encontras.

1x3=3
2x3=6
3x3=9
4x3=12
5x3=15
6x3=18
7x3=21
8x3=24
9x3=27
10x3=30
11x3=33
12x3=36
13x3=39
14x3=42
15x3=45
…

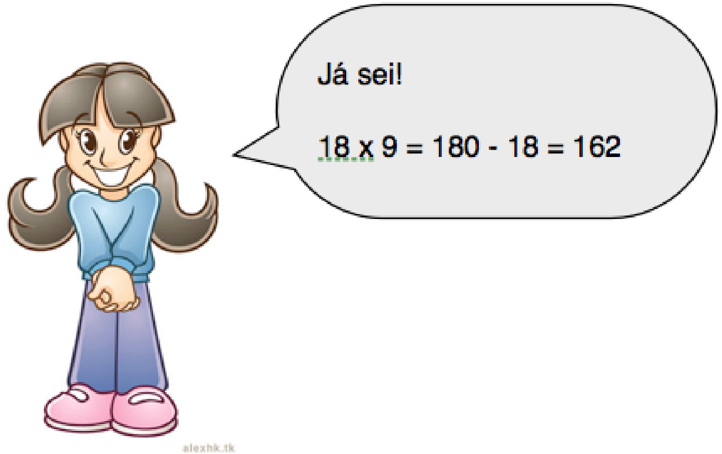
[15] Adaptada de Canavarro (2009).

Tarefa 18

"A estratégia da Marta"

Observa a forma como a Marta resolveu o seguinte produto:

18 × 9 =



Marta

1. A resposta da Marta está correta? Explica a estratégia que ela usou.

----

2. Utiliza a estratégia da Marta para calcular os produtos seguintes. Mostra como pensaste.

12x9=
16x9=
25x9=
14x9=
25x11=

Tarefa 19

"Verdadeiro ou falso"[16]

Observa as seguintes igualdades e assinala-as como verdadeiras ou falsas colocando uma × na opção V ou F, prospectivamente. Justifica as tuas opções.

Igualdade	V	F	Justificação
$7 \times 8 = 6 \times 8 + 8$			
14 x 5 + 3 x 9 + 5 = 9 x 10			
$7 \times 7 + 7 \times 1 = 7 \times 8$			
$6 \times 9 = 7 \times 9 - 1 \times 9$			
$3 \times 8 + 7 \times 8 = 21 \times 8$			
$9 \times 8 - 8 \times 4 = 5$ x 8			
12 x 7 = 7 x 10 x 2			

Tarefa 20

"Descobrir o valor do símbolo"

Descobre o valor de cada símbolo de modo a se verificar a igualdade. Mostra como pensaste.

$(5 \times 13) + (9 \times 13) = \blacktriangle \times 13$

$(83 \times 56) - (83 \times 6) = 83 \times$ ❀

$32 \times 11 = (32 \times 10) +$ ♣

$23 \times 17 = 23 \times (10 +$ ✯ $)$

[16] Adaptada de Carpenter, Franke & Levi, (2003).

Tarefa 21[17]

"Os cromos da Ana e do Bruno"

A Ana e o Bruno estão a fazer uma colecção de cromos. No domingo passado, a avó ofereceu a cada um deles a mesma quantidade de cromos para colarem nas suas cadernetas. A Ana colou 18 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa A. O Bruno colou 20 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa B.

Podemos representar **a quantidade de cromos que a Ana tem**, da seguinte forma:

$$18 + Ⓐ$$

número de cromos colados na caderneta — cromos guardados na caixa A

Podemos representar **a quantidade de cromos que o Bruno tem**, da seguinte forma:

$$20 + Ⓑ$$

número de cromos colados na caderneta — cromos guardados na caixa B

Como os dois meninos têm o mesmo número total de cromos, podemos construir a seguinte igualdade:

$$18 + Ⓐ = 20 + Ⓑ$$

a) Quantos cromos terá a Ana na caixa Ⓐ e quantos cromos terá o Bruno na caixa Ⓑ?

----

[17] Adaptada de Stephens & Wang (2008).

b) Descobre se existem outros valores para o número de cromos das caixas Ⓐ e Ⓑ, de modo a que o número total de cromos dos dois meninos continue a ser igual.

$$18 + Ⓐ = 20 + Ⓑ$$

----

c) Que relação existe entre os números que usaste para as caixas Ⓐ e Ⓑ?

----

d) Se a igualdade for a seguinte, que relação poderá existir entre os números das caixas Ⓐ e Ⓑ?

$$226 + Ⓐ = 231 + Ⓑ$$

Tarefa 22

"Descobre A e B"

1. Observa a seguinte igualdade:

$6 \times Ⓐ = 12 \times Ⓑ$

a) Coloca números nas caixas Ⓐ e Ⓑ de modo a teres três afirmações verdadeiras.

$6 \times Ⓐ = 12 \times Ⓑ$

Ⓐ =

Ⓑ =

$6 \times Ⓐ = 12 \times Ⓑ$

Ⓐ =

Ⓑ =

$6 \times Ⓐ = 12 \times Ⓑ$

Ⓐ =

Ⓑ =

b) Que relação existe entre os números que colocaste nas caixas Ⓐ e Ⓑ?

----

c) Se a igualdade for a seguinte, que relação poderá existir entre os números das caixas Ⓐ e Ⓑ?

$15 \times Ⓐ = 5 \times Ⓑ$

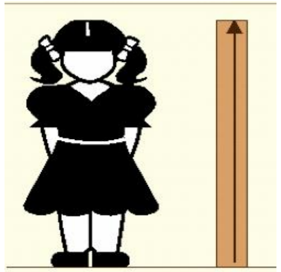
Tarefa 23[18]

"Comparando alturas"

A Maria, o Tomás e a Júlia estiveram a medir as suas alturas na aula.

Altura da Maria	Altura do Tomás	Altura da Júlia
125 cm		
130 cm		

O Tomás é 4 cm mais alto do que a Maria. A Maria é 6 cm mais baixa do que a Júlia.



Maria Altura da Maria

1. O que podes dizer sobre a altura das três crianças?

----

[18] Adaptado de Carraher, Brizuela & Schliemann (2000).

2. Desenha a altura da Maria, do Tomás e da Júlia. Mostra o que significam os números 4 e 6.

----

3. Se a Maria medir 125 cm de altura, quanto medem o Tomás e a Júlia? E se a Maria medir 130 cm de altura, quanto medem os outros dois meninos? Completa a tabela atribuindo valores às alturas dos três meninos.

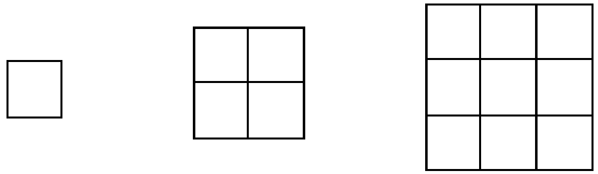
----

4. Se a altura da Maria for representada por ☆, como podemos representar a altura do Tomás? E a altura da Júlia?

Tarefa 24

"Os quadrados I"[19]

Observa a sequência:



1. Desenha a 4ª figura da sequência e explica como pensaste.

--2. Completa a tabela, tendo em conta que o lado do 1º quadrado corresponde à unidade de medida de comprimento:

Medida do lado do quadrado	**Perímetro do quadrado**

----

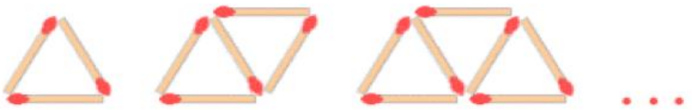
3. Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado são 20 unidades? Explica como pensaste.
4. Determina a medida do lado de um quadrado que tem de perímetro 40. Explica como pensaste.
5. Escreve uma frase que relacione a medida do lado de um quadrado qualquer com o seu perímetro.

[19] Adaptada de Ponte et al. (2006).

Tarefa 25

"Construindo triângulos com fósforos"[20]

Com 3 fósforos podes construir um triângulo de perímetro 3. Com 5 fósforos podes construir uma figura, formada por dois triângulos, com perímetro 4. Com 7 fósforos podes construir...



1. Constrói a figura seguinte e desenha-a.

----

2. Preenche a tabela seguinte.

N.º da figura	N.º de fósforos	N.º de triângu-los	Perímetro da figura
1	3	1	3
2			
3			

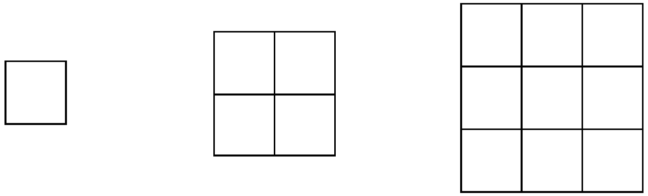
3. Quantos fósforos são precisos para construir uma figura formada por 10 triângulos? Qual será o seu perímetro? Mostra como pensaste.
4. E quantos fósforos são precisos para construir uma figura formada por 25 triângulos? Qual será o seu perímetro? Mostra como pensaste.
5. Consegues descobrir alguma regra que permita saber o número de triângulos de uma figura qualquer? Explica como encontraste essa regra.

[20] Adaptada de APM (1998).

Tarefa 26

"Os quadrados II"[21]

Observa a sequência:



1. Completa a tabela, tendo em conta que a área do 1.º quadrado corresponde à unidade de medida de área:

Medida do lado do quadrado	Área do quadrado

2. Qual é a área de um quadrado cujo lado são 9 unidades de medida? Explica como pensaste.
3. Determina a medida do lado de um quadrado que tem de área 121. Explica como pensaste.
4. Existe algum quadrado com a área igual a 42? Explica como pensaste.
5. Escreve uma frase que relacione a medida do lado de um quadrado qualquer com a sua área.

[21] Adaptada de Ponte et al. (2006).

Tarefa 27

"Os azulejos"[22]

Os alunos do 4º ano foram visitar uma fábrica de azulejos. Ofereceram-lhes 18 azulejos quadrados[23]. Quando chegaram à escola quiseram construir um painel de forma retângula, mas depressa descobriram que podiam compor diferentes formas de retângulos.

1 - Descobre todos os painéis diferentes que é possível construir usando os 18 azulejos.

2 - Sabendo que cada lado do azulejo mede 1 dm, indica o perímetro e a área de cada um dos painéis que construíste. Mostra como pensaste.

3 - O que podes concluir?

[22] Adaptada de Escola Superior de Educação de Lisboa (2006).
[23] Cada par/grupo de alunos trabalhou um número diferente de azulejos.

Tarefa 28

"A cerca do Faísca"[24]

O dono do Faísca tem 40 metros[25] de rede para construir uma cerca retângula para o seu cão. Quais deverão ser as dimensões da cerca para que o Faísca tenha o maior espaço para correr?

[24] Adaptada de Canavarro (2009).
[25] Cada par/grupo de alunos trabalhou um comprimento diferente.

Tarefa 29

"A cerca do Bobi"

O dono do Bobi tem 60 metros[26] de rede para truir uma cerca retângula para o seu cão. Quando começou a pensar sobre a forma como poderia construir a cerca, o dono do Bobi descobriu que tinha várias possibilidades.

1. Descobre o comprimento e a largura das diferentes cercas que o dono do Bobi pode construir.

2. Qual será a melhor opção para que o Bobi tenha o maior espaço para correr?

[26] Cada par/grupo de alunos trabalhou um comprimento diferente.

Tarefa 30

"Pensa num número"[27]

1. Pensa num número e obedece às diferentes indicações que te são dadas.

1.1 Escolhe um número.

Escreve o número que escolheste.	
Adiciona 10 a esse número. Escreve a soma.	
Subtrai 10 a esse resultado.	

1.2 Experimenta com outros números.

Escreve o número que escolheste.	
Adiciona 10 a esse número. Escreve a soma.	
Subtrai 10 a esse resultado.	

Escreve o número que escolheste.	
Adiciona 10 a esse número. Escreve a soma.	
Subtrai 10 a esse resultado.	

Escreve o número que escolheste.	
Adiciona 10 a esse número. Escreve a soma.	
Subtrai 10 a esse resultado.	

1.3. Que descoberta fizeste? Porque é que isso aconteceu?

----

[27] Adaptada de Ponte, Branco & Matos (2009).

2 - Experimenta agora obedecer a estas novas indicações. Descobre o que aconteceu e tira as tuas conclusões.

2.1. A multiplicar e a dividir...

Escolhe um número e escreve-o.	
Multiplica esse número por 6.	
Agora divide por 2.	
Divide o resultado por 3.	

Escolhe um número e escreve-o.	
Multiplica esse número por 6.	
Agora divide por 2.	
Divide o resultado por 3.	

Escolhe um número e escreve-o.	
Multiplica esse número por 6.	
Agora divide por 2.	
Divide o resultado por 3.	

Conclusões:

<u>Tarefa 31</u>

"Explorando dominós e calendários"[28]

1. Os números e o calendário...

1.1. Observa o calendário do mês de Maio e as datas que estão destacadas:

domingo	segunda	terça	quarta	quinta	sexta	sábado
1	**2**	**3**	4	5	6	7
8	**9**	**10**	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

1.2. Obedece às seguintes indicações:

Adiciona as quatro datas destacadas.	
Divide essa soma por 4.	
Subtrai 4. Que número obtiveste?	

1.3. Escolhe outras datas que formem a mesma configuração de um quadro 2x2 e obedece às indicações.

Adiciona as quatro datas destacadas.	
Divide essa soma por 4.	
Subtrai 4. Que número obtiveste?	

Adiciona as quatro datas destacadas.	
Divide essa soma por 4.	
Subtrai 4. Que número obtiveste?	

Adiciona as quatro datas destacadas.	
Divide essa soma por 4.	
Subtrai 4. Que número obtiveste?	

1.4. Regista as tuas descobertas.

1.5. Adicionando as quatro datas que a Maria escolheu, obtemos 108. Consegues descobrir quais as quatro datas que a Maria escolheu? Mostra como pensaste.

----

[28] Adaptada de Geer (1992).

2. Os números e o dominó...

2.1. Escolhe uma peça de dominó e segue as seguintes instruções.

Conta o número de pintas do lado esquerdo da peça de dominó. Regista-o.	
Multiplica esse número por 5.	
Adiciona 7.	
Multiplica por 2.	
Adiciona ao número que obtiveste o número de pintas do lado direito da peça de dominó.	

2.2. Experimenta com outros valores, escolhendo outras peças do dominó.

Conta o número de pintas do lado esquerdo da peça de dominó. Regista-o.	
Multiplica esse número por 5.	
Adiciona 7.	
Multiplica por 2.	
Adiciona ao número que obtiveste o número de pintas do lado direito da peça de dominó.	

Conta o número de pintas do lado esquerdo da peça de dominó. Regista-o.	
Multiplica esse número por 5.	
Adiciona 7.	
Multiplica por 2.	
Adiciona ao número que obtiveste o número de pintas do lado direito da peça de dominó.	

Conta o número de pintas do lado esquerdo da peça de dominó. Regista-o.	
Multiplica esse número por 5.	
Adiciona 7.	
Multiplica por 2.	
Adiciona ao número que obtiveste o número de pintas do lado direito da peça de dominó.	

2.3. Observa os números que obtiveste e compara-os com as peças do dominó que escolheste. O que podes concluir?

Tarefa 32

"Calendários e tabelas"[29]

1. Os números no calendário

Observa o calendário do mês de Maio e as datas que estão destacadas:

domingo	segunda	terça	quarta	quinta	sexta	sábado
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	**16**	**17**	18	19	20	21
22	**23**	**24**	25	26	27	28
29	30	31				

1.1. O Pedro descobriu que se adicionar os números em cruz, 16 e 24 e 23 e 17, obtém valores iguais. Verifica se ele tem razão.

1.2. Encontra outros números em cruz onde isso aconteça e explica porquê.

[29] Adaptada de Geer (1992).

Anexo 3 - Tarefas

2. Os números na tabela...

Observa a seguinte tabela e os números que estão destacados.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	**55**	56	57	58	59	60
61	62	63	**64**	**65**	**66**	67	68	69	70
71	72	73	74	**75**	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2.1. O Pedro diz que se adicionar os números em linha obtém o mesmo valor que na adição dos números em coluna. Verifica se o Pedro tem razão.

--2.2.

Consegues encontrar outros números com a mesma disposição na tabela onde isso aconteça? Mostra as tuas descobertas.

--2.3.

Será que a mesma relação se verifica quando o número que está no centro é 823? Explica porquê.

	823	

Sequência IV

Tarefa 33

"Os números e o calendário"

1. Os números e o calendário I

1.1. Na tarefa "Os números e o calendário" descobrimos que realizando algumas operações obteríamos sempre o número do canto superior esquerdo de um quadro 2x2 do calendário. Recorda o exemplo:

domingo	segunda	terça	quarta	quinta	sexta	sábado
1	**2**	**3**	4	5	6	7
8	**9**	**10**	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

1) Adiciona as quatro datas destacadas.	16+17+23+24= 80
2) Divide essa soma por 4.	80:4= 20
3) Subtrai 4. Que número obtiveste?	20-4= 16

1.2. Descobre por que razão isso acontece.

Tarefa 34

"Pares e ímpares"[30]

1. Investiga o que acontece quando adicionas um número par com um número ímpar?

----

2. Investiga o que acontece quando adicionas dois números pares? E três números pares? E se forem quatro números pares?

----

3. Supõe que terias de adicionar muitos números pares, mas não saberias quantos, poderias dizer se o resultado seria par ou ímpar? Mostra como pensaste.

----

4. Investiga o que acontece quando adicionas dois números ímpares? E três números ímpares? E se forem quatro números ímpares?

----

5. Supõe que terias de adicionar muitos números ímpares, mas não saberias quantos, poderias dizer se o resultado seria par ou ímpar? Mostra como pensaste.

[30] Adaptada de Ponte, Branco & Matos (2009).

Tarefa 35

"Quantos telefonemas?"[31]

Cinco alunos ganharam um concurso. Quando souberam da notícia, telefonaram uns aos outros a felicitarem-se.

Descobre quantas chamadas tiveram que fazer os cinco amigos para se felicitarem todos entre si.

E se fossem seis amigos, quantas chamadas fariam?

E sete amigos, quantas chamadas fariam?

Consegues descobrir uma regra para qualquer número de amigos?

[31] Adaptado de Canavarro (2009).

Tarefa 36

"A mesada da Ana"[32]

A Ana está a quase a entrar para o 5.º ano de escolaridade. Os pais pensaram em oferecer-lhe uma mesada e propuseram-lhe duas opções:

Opção A - 10 euros em Setembro e em cada um dos meses seguintes mais 10 euros do que no mês anterior;
Opção B - 1 euro em Setembro, triplicando em cada mês o valor da mesada do mês anterior.

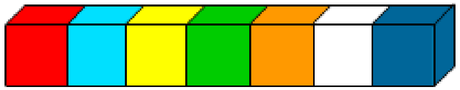
Qual será a melhor opção da Ana? Será sempre preferível essa opção?

[32] Adaptada de Escola Superior de Educação de Lisboa (s/d).

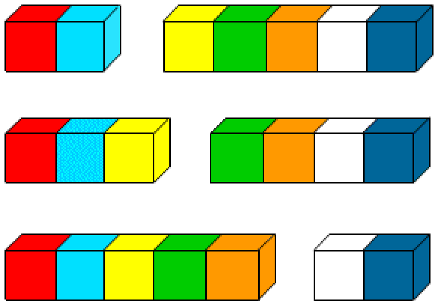
<u>Tarefa 37</u>

"Separando cubos"[33]

Na figura seguinte estão representados 7 cubos encaixados:



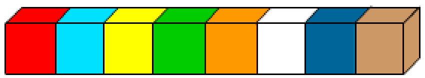
Os cubos podem ser separados em **duas partes**, mas não se pode mudar a ordem das cores.
Na figura seguinte estão representadas três formas diferentes de separar os 7 cubos:



1. De quantas formas diferentes podes separar esses 7 cubos, em duas partes? Mostra como pensaste.

----

2. E se forem 8 cubos, de quantas formas diferentes os podes separar? Mostra como pensaste.



----

3. Usa a tabela para determinar o número de maneiras diferentes para separar diferentes quantidades de cubos, em duas partes.

Número de cubos	Número de maneiras diferentes de os separar em duas partes
6	
7	
8	
10	
20	
50	
100	

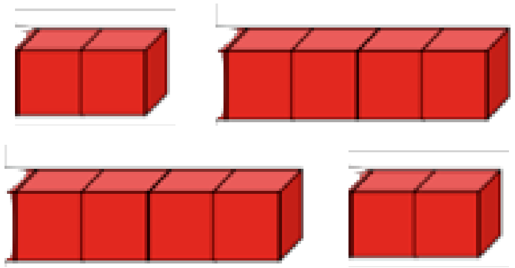
----

4. Consegues descobrir a regra para calcular o número de formas diferentes para separar qualquer número de cubos em duas partes?

----

[33] Adaptado de Escola Superior de Educação: Instituto Politécnico de Setúbal (s/d).

5. Se todos os cubos tiverem a mesma cor, quando separamos 6 cubos em duas partes, uma parte de 2 cubos e uma parte de 4 cubos é igual a uma parte de 4 cubos e uma parte de 2 cubos.



5.1 De quantas maneiras é possível separar estes 6 cubos em duas partes? E se forem 9 cubos? Mostra como pensaste.

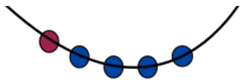
5.2 Constrói uma tabela onde mostres o número de maneiras para separar diferentes quantidades de cubos da mesma cor, em duas partes.

5.3. O que podes concluir sobre o número de formas diferentes para separar qualquer número de cubos da mesma cor, em duas partes?

Tarefa 38

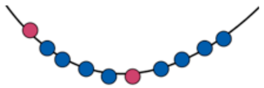
"Colares I"[34]

A Maria está a fazer colares para oferecer às suas amigas. Só tem contas de duas cores - azuis e vermelhas. Começou por construir o primeiro colar:

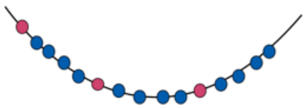


1.º colar

Depois, fez o segundo e o terceiro colares:



2.º colar



3.º colar

1 - Desenha o quarto colar construído pela Maria.

----

[34] Adaptada de Ponte, J. P., Silvestre, A. I., Garcia, C. & Costa, S. (2010).

2 - Preenche a tabela:

Número de contas azuis	Número de contas vermelhas

----

3 - Como podes escrever a relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas? Mostra como pensaste.

----

4 - Se o colar tiver 68 contas azuis, quantas contas vermelhas terá? Mostra como pensaste.

5 - Se o número total de contas do colar for 40, quantas serão as contas vermelhas? Mostra como pensaste.

6 - Se o número total de contas do colar for 110, quantas serão as contas vermelhas? Mostra como pensaste.

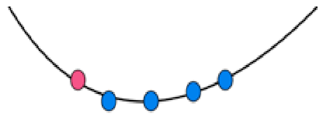
7 - Descobre uma regra que permita encontrar o número total de contas de um colar sabendo o número de contas vermelhas desse colar. Mostra como pensaste.

<u>Tarefa 39</u>

"Colares I - continuação"

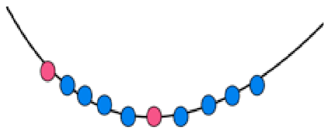
Recorda a situação que começámos a trabalhar na aula anterior:

A Maria está a fazer colares para oferecer às suas amigas. Só tem contas de duas cores - azuis e vermelhas. Começou por construir o primeiro colar:

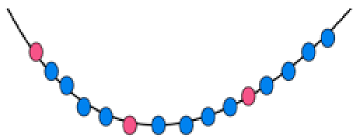


1.º colar

Depois, fez o segundo e o terceiro colares:



2.º colar



3.º colar

- Se o número total de contas do colar for 40, quantas serão as contas vermelhas? Mostra como pensaste.
- Se o número total de contas do colar for 110, quantas serão as contas vermelhas? Mostra como pensaste.
- Descobre uma regra que permita encontrar o número de contas vermelhas de um colar sabendo o número total de contas desse colar. Mostra como pensaste.

Para resolver às questões anteriores, os pares responderam de forma diferente.

1 - Observa cada uma das resoluções dos diferentes pares. Discute com o teu colega e reponde às seguintes questões:

1.1.- Como é que cada resolução mostra a relação entre o número de contas vermelhas e o número total de contas?

1.2. - Quais são as diferenças e semelhanças entre as respostas?

2 - Escolhe uma das resoluções apresentadas e tenta melhorá-la tornando-a mais clara.

----

3 – Se o número total de contas for 385, qual será o número de contas vermelhas?

4 – Sabendo que o número de contas vermelhas é 198, como podes saber o número total de contas?

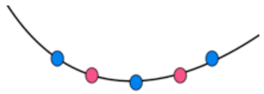
----

5 – E como é que podes descobrir o número de contas azuis de um colar sabendo o número total de contas desse colar. Mostra como pensaste.

Tarefa 40

"Colares II"

As amigas da Maria gostaram tanto dos colares que lhe pediram para fazer mais. A Maria decidiu usar um padrão diferente nos novos colares, mas continuou a usar apenas contas de duas cores - azuis e vermelhas. Começou por construir o primeiro colar:



1.º colar

Depois, fez o segundo e o terceiro colares:

2.º colar 3.º colar

1 – Desenha o quarto colar construído pela Maria. Quantas contas tem no total?

----

2 – Quantas contas terá o colar número 12? Mostra como pensaste.

3 – Encontra uma regra que te permita dizer o número total de contas em qualquer colar desse tipo.

----

4 – Há algum colar deste tipo com 181 contas? Explica.

5 – Qual é o número do colar que tem 647 contas? Mostra como pensaste.

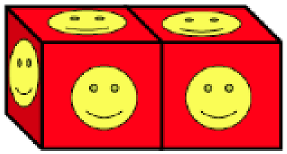
6 – Encontra uma regra que permita saber qual é o número do colar sabendo o número total de peças desse colar.

Tarefa 41

"Cubos com autocolantes"[35]

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.



1 - Descobre quantos autocolantes a Joana usa nas construções seguintes e explica como pensaste.

1.1. Três cubos.
1.2. Quatro cubos.
1.3. Dez cubos.
1.4. Cinquenta e dois cubos.

2 - Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

----

3 - A Joana usou 142 autocolantes numa construção de cubos como estas. Quantos cubos tinha essa construção? Mostra como pensaste.

4 - Como é que podes saber o número de cubos de uma construção, sabendo o número de autocolantes? Mostra como pensaste.

[35] Adaptada de Moss et al. (2005).

Tarefa 42

"Porta-aviões"[36]

1 – Observa a seguinte sequência pictórica:

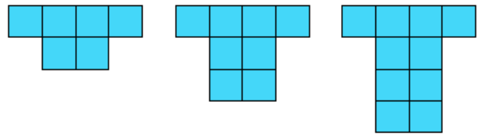


Figura 1 Figura 2 Figura 3

1.1. Descobre uma regra que permita saber o número total de quadrados para uma figura qualquer da sequência. Mostra como pensaste.

1.2. Se souberes o número total de quadrados, como podes descobrir o número dessa figura? Explica.

----

2 – Observa outra sequência:

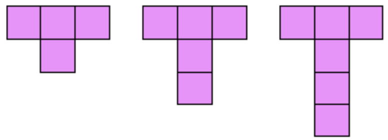


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

2.1. Indica uma regra que permita descobrir o número total de quadrados para uma figura qualquer desta sequência. Mostra como pensaste.

----

3 – Com base nos porta-aviões anteriores, **é a tua vez de criares uma nova sequência!** Desenha-a e indica uma regra que permita descobrir o número total de quadrados para uma figura qualquer dessa sequência.

[36] Adaptada de Santos (2008).

Anexo 4

Categorias de análise

RELATIVAMENTE AO PROCESSO	**Níveis de generalização** (adaptado de Radford, 2008; Rivera & Becker, 2007; Mason, Drury & Bills, 2007)	Nível 0		Não Generaliza	Não reconhece a comunalidade entre os casos apresentados. Apresenta, eventualmente, tentativas de apreensão da comunalidade, mas que se baseiam em palpites e não são testadas.
		Nível 1		Generalização Aritmética	Reconhece a comunalidade entre os casos apresentados, mas apenas considera as quantidades conhecidas e opera com elas. Não faz a extensão para quantidades indeterminadas e, desta forma, não define uma regra geral.
		Algébrica	Nível 2	Factual ou empírica	Reconhece a indeterminação com sentido quase-variável, a partir de casos particulares, mas não a nomeia. Apresenta, eventualmente, uma regra para os casos particulares.
			Nível 3	Contextual	Nomeia a indeterminação e trata-a analiticamente, apoiando-se numa descrição do contexto da situação. Define uma regra geral, mas dentro do contexto da situação.
			Nível 4	Global	Nomeia a indeterminação de forma global e trata-a analiticamente, não se apoiando na descrição do contexto da situação. Define uma regra geral.
			Nível 5	Estrutural	Nomeia a indeterminação de forma geral e trata-a analiticamente, revelando a estrutura matemática dos objetos. Define uma regra estrutural.
RELATIVAMENTE AOS CONTEXTOS	**Níveis de pensamento relacional** (Adaptado de Carpenter, Franke & Levi, 2003; Fujii, 2003)		Nível 0	Não relacional	Não reconhece as relações numéricas e/ou propriedades das operações, centrando-se em procedimentos de cálculo.
			Nível 1	Utilização de exemplos particulares	Reconhece e usa relações numéricas e/ou propriedades das operações em exemplos particulares.
			Nível 2	Utilização de Quase-variáveis	Reconhece e usa relações numéricas e/ou propriedades das operações em exemplos particulares, mas com sentido de quase-variáveis.
			Nível 3	Relacional	Reconhece e usa relações numéricas e/ou propriedades das operações independentemente dos casos particulares, evidenciando a sua generalidade.
	Níveis de pensamento funcional (adaptado de Blanton & Kaput, 2011; Smith, 2008; Martinez & Brizuela, 2006; Tanish, 2011)		Nível 0	Não relacional – variação simples	Não reconhece uma relação entre as variáveis, podendo reconhecer (recursivamente) apenas a variação em uma variável ou nas duas variáveis, mas isoladamente. Desta forma, não considera a relação entre as variáveis.
			Nível 1	Relação Recursiva	Reconhece recursivamente uma relação entre as variáveis.
			Nível 3	Relação Funcional	Reconhece a relação direta entre a variável dependente e a variável independente.
RELATIVAMENTE À REPRESENTAÇÃO	**Tipos de representação**		Linguagem natural		Usa uma descrição verbal, escrita ou oral.
			Numérica		Usa uma expressão numérica.
			Icónica	Desenhos	Usa desenhos.
				Tabelas	Usa tabelas.
				Diagramas ou esquemas	Usa diagramas (de setas, do modelo da balança,...) ou esquemas.
			Pré-simbólica	Sincopada	Usa uma linguagem sincopada.
			Simbólica	Idiossincrática	Usa símbolos próprios.
				Alfanumérica	Usa a notação alfanumérica.